ESTUDO E ELABORAÇÃO DE MATERIAL DIDÁTICO SOBRE FRAÇÕES PARCIAIS APLICADAS A SISTEMAS ANALÓGICOS E DIGITAIS

Juliana A. Peixoto – jpeixoto@id.uff.br
Roberto B. Di Renna – robertobrauer@telecom.uff.br
Carina R. B. Corrêa – carinabarbio@telecom.uff.br
Alexandre S. de la Vega– delavega@telecom.uff.br
Grupo PET-Tele – http://www.telecom.uff.br/pet
Universidade Federal Fluminense – UFF
Escola de Engenharia – TCE
Departamento de Engenharia de Telecomunicações – TET
Rua Passo da Pátria, 156 / Bloco D / Sala 504
24.210-240 – Niterói – RJ

Resumo: *O objetivo do presente trabalho foi o estudo e a elaboração de material didático sobre a expansão de funções algébricas racionais em frações parciais. O assunto em questão é encontrado tanto em algumas disciplinas básicas quanto em algumas disciplinas específicas do Curso de Graduação em Engenharia, as quais envolvem a análise e o projeto de sistemas analógicos e digitais. Dentre as várias motivações, pode ser citado o exercício da geração de material autoral, com a visão do aluno e baseado nas necessidades apresentadas por ele. O material elaborado é disponibilizado no website do Grupo PET-Tele, para download gratuito*.

Palavras-chave: *Programa de Educação Tutorial (PET), Desenvolvimento de Material Didático, Frações Algébricas Racionais, Expansão em Frações Parciais, Sistemas Analógicos e Digitais.*

1. INTRODUÇÃO

Várias foram as motivações para o desenvolvimento desse trabalho. O Programa de Educação Tutorial (PET) [MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2013], financiado pelo Ministério da Educação (MEC), exige que os bolsistas dos grupos PET, ao serem submetidos a uma formação complementar, desenvolvam atividades que possuam, cada uma delas, itens relativos às áreas de Pesquisa, Ensino e Extensão, bem como consigam algum tipo de penetração no curso ao qual o seu grupo pertence. Nesse sentido, tanto para cumprir um dos requisitos do Programa PET, que é a produção, a manutenção e a disponibilização gratuita, de material didático autoral, como para incentivar essa prática, que não é regularmente desenvolvida ao longo do curso de graduação em questão, a mesma é inserida entre as atividades regulares do grupo PET do Curso de Engenharia de Telecomunicações da Universidade Federal Fluminense (PET-Tele) [PET-TELE, 2013]. Além disso, em função do tipo de trabalho a ser desenvolvido por um profissional de Engenharia, é fácil perceber que devem ser fomentados, na sua formação, o conhecimento, o domínio e a aplicação de ferramentas matemáticas. Por outro lado, muitas vezes, o material de estudo apresenta um foco extremamente matemático, o que dificulta a percepção do problema por parte do aluno. Assim, faz-se necessária a produção de textos mais adequados a cada área de atuação. Da mesma forma, uma adequação desse texto também se faz necessária para pessoas que estejam se iniciando no assunto. Nesse contexto, a expansão de frações algébricas racionais em frações parciais encontra aplicação em diversas áreas da Matemática e da Engenharia. Portanto, ela se faz presente tanto em algumas disciplinas básicas quanto em algumas disciplinas específicas do curso de graduação abordado. Finalmente, alguns integrantes do Grupo PET-Tele, ao entrarem em contato com o assunto em disciplina básica do curso e ao perceberem que o mesmo assunto seria aplicado em outras disciplinas do curso, propuseram a realização do trabalho aqui descrito, com a intenção de facilitar a compreensão do tema.

Os objetivos fixados foram o estudo da expansão de frações algébricas racionais em frações parciais e suas possíveis aplicações, o desenvolvimento de exemplos sobre a composição de funções parciais para melhor visualização do problema e a produção de material didático sobre o assunto. O foco principal do trabalho foi resumir o assunto de forma simples, segundo a ótica dos alunos e baseado nas dificuldades visualizadas por eles.

A metodologia de trabalho adotada foi a mesma utilizada em outras atividades do grupo. Inicialmente, foi definido o assunto, baseado na argumentação de alguns integrantes. Em seguida, foi estabelecida uma bibliografia inicial e foi realizada uma pesquisa sobre o assunto. Fundamentado na leitura do material bibliográfico, o tema foi desenvolvido, seguindo os objetivos definidos. Finalmente, foi elaborado o material didático.

A seguir, é apresentado um resumo do resultado do trabalho realizado. A Seção 2 introduz o problema, abordando os conceitos básicos envolvidos no trabalho. As funções algébricas racionais e a sua expansão em frações parciais, são definidas na Seção 3. A Seção 4 discute alguns exemplos de aplicação para a expansão em frações parciais. As fórmulas gerais para o cálculo dos coeficientes das frações parciais são apresentadas na Seção 5. A Seção 6 aborda os exemplos desenvolvidos sobre a composição de funções racionais a partir de frações parciais. Finalmente, as conclusões e os trabalhos futuros são apresentados na Seção 7.

2. CONCEITOS BÁSICOS

As funções denominadas de frações algébricas racionais ou funções polinomiais racionais, bem como a sua expansão em frações parciais, aparecem em diversas áreas de estudo. Portanto, é importante que sejam bem compreendidos a sua origem, a sua aplicação e o seu cálculo. Esses tópicos são brevemente descritos abaixo e cada um deles abordado nas próximas seções.

A técnica consiste na fatoração de uma função polinomial racional de ordem qualquer em uma soma de termos que são frações polinomiais similares entre si e de ordem reduzida.

Algumas aplicações são clássicas. A primeira delas é o cálculo de Transformadas Lineares Inversas. Supondo que a função em domínio transformado é do tipo polinomial racional, a expansão simplifica o procedimento de cálculo da transformação inversa, ao lidar com funções mais simples e tabeladas. Na mesma linha de aplicação, as frações parciais podem ser empregadas no estudo de Sistemas Lineares e Invariantes ao Tempo (SLIT), analógicos, amostrados ou digitais, descritos por equações diferenciais ou equações de diferenças. Nesse caso, uma transformação da equação de definição conduz a uma função polinomial racional. Expandindo-se a função em frações parciais e tomando-se a transformada inversa de cada uma delas, obtém-se a resposta do sistema. Um terceiro exemplo de emprego de frações parciais diz respeito à implementação de um SLIT descrito por uma equação diferencial ou uma equação de diferença. Aplicando-se uma transformação à sua equação de definição, obtém-se uma função polinomial racional que, uma vez fatorada em frações parciais, fornece uma alternativa de implementação composta por um arranjo paralelo (soma) de blocos com menor complexidade e com características mais facilmente identificadas.

No tocante ao procedimento de cálculo da expansão, o problema se resume a calcular os coeficientes que aparecem em cada fração parcial, após a fatoração da função original.

Além disso, pode-se verificar ainda que, muitas vezes, na demonstração de fórmulas gerais, inicia-se por exemplos simples e depois, por inferência, obtém-se uma forma genérica ou desenvolve-se um conceito que irá ser usado para gerar a forma genérica. Por outro lado, muitas vezes, na utilização de uma fórmula geral, a visualização do processo de cálculo com exemplos simples facilita a compreensão da ideia geral que a formulação possui. Baseado nesse raciocínio, e com o objetivo de tentar melhorar a compreensão do procedimento de obtenção das frações parciais, podem ser de grande utilidade o desenvolvimento de alguns exemplos de composição de funções polinomiais racionais a partir de frações parciais. Isso foi feito e também é abordado a seguir.

3. FRAÇÕES PARCIAIS

Em diferentes áreas de estudo e em diferentes aplicações, é comum a utilização de funções que são definidas por razões de polinômios de variáveis complexas, com coeficientes reais e constantes. Tais funções, denominadas de frações racionais, ou frações algébricas racionais ou funções polinomiais racionais, podem ser descritas por:

$$F(v) = \frac{N_F(v)}{D_F(v)} = \frac{d_m v^m + d_{m-1} v^{m-1} + \cdots + d_1 v + d_0}{a_n v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \cdots + a_1 v + a_0},$$

onde $v \in \mathbb{C}$, $a_i, d_i \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$.

Para o caso de $m \geq n$, $F(v)$ é dita uma fração imprópria. Por outro lado, se $m < n$, $F(v)$ é denominada uma fração própria. Se $F_I(v)$ for uma fração imprópria, pode-se separá-la na soma de um polinômio $P(v)$ com uma fração própria $F_P(v)$, através de uma divisão de polinômios.

As raízes (ou zeros) dos polinômios $N_{F_P}(v)$ e $D_{F_P}(v)$ são os valores de v que anulam tais polinômios. Os zeros de $N_{F_P}(v)$ também anulam $F_P(v)$, enquanto os zeros de $D_{F_P}(v)$ fazem $F_P(v)$ tender a infinito. Assim, os zeros de $N_{F_P}(v)$ e de $D_{F_P}(v)$ são denominados, respectivamente, zeros e pólos de $F_P(v)$. Se forem contabilizados todos os pontos singulares (zeros/pólos, finitos/infinitos) de $F_P(v)$, o número de zeros será igual ao número de pólos.

Levando em consideração seus pólos e seus zeros, a função $F_P(v)$ pode ser descrita por:

$$F_P(v) = \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P}(v)} = \frac{b_l v^l + b_{l-1} v^{l-1} + \cdots + b_1 v + b_0}{a_n v^n + a_{n-1} v^{n-1} + \cdots + a_1 v + a_0}$$

$$= K_{zp} \frac{(v - z_l)(v - z_{l-1}) \cdots (v - z_2)(v - z_1)}{(v - p_n)(v - p_{n-1}) \cdots (v - p_2)(v - p_1)}, \qquad (1)$$

onde z_k são os zeros de $F_P(v)$, p_k são os pólos de $F_P(v)$ e K_{zp} é a constante de ganho de $F_P(v)$, dada por

$$K_{zp} = \frac{b_l}{a_n}.$$

Como será abordado nas próximas seções, assumindo-se que $F_P(v)$ é uma função própria, a Equação (1) também pode ser fatorada no somatório:

$$F_P(v) = \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P}(v)} = \sum_i F_i(v) = \sum_i \frac{K_i}{(v - p_i)} \ ,$$

para pólos simples, ou no somatório

$$F_P(v) = \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P}(v)} = \sum_i F_{iM}(v) = \sum_i \sum_{j=1}^{M} \frac{K_{ij}}{(v - p_i)^j}$$
$$= \sum_i \frac{K_{il}}{(v - p_i)} + \frac{K_{i2}}{(v - p_i)^2} + \cdots + \frac{K_{iM}}{(v - p_i)^M} \ ,$$

para pólos de multiplicidade M, ou ainda na combinação de ambos os somatórios

$$F_P(v) = \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P}(v)} = \sum_i F_i(v) + \sum_i F_{iM}(v) \ ,$$

se houver presença de pólos simples e de pólos múltiplos simultaneamente.

Tal fatoração, da função algébrica racional própria $F_P(v)$ em funções mais simples $F_i(v)$ e/ou $F_{iM}(v)$, é denominada de expansão em frações parciais.

Mais detalhes sobre os tópicos abordados nessa seção podem ser encontrados nas seguintes referências: [IEZZI *et al.*, 1995], [LATHI, 1998], [MITRA, 1998] e [OPPENHEIM *et al.*, 1983].

4. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO PARA FRAÇÕES PARCIAIS

Alguns casos particulares do emprego de frações parciais são discutidos a seguir. Mais detalhes sobre os tópicos abordados nessa seção podem ser encontrados nas seguintes referências: [BOYCE *et al.*, 1979], [DE LA VEGA, 2005], [DE LA VEGA, 2013], [LATHI, 1998], [MITRA, 1998], [NILSSON *et al.*, 2009], [OPPENHEIM *et al.*, 1983], [STEWART, 2009] e [ZILL *et al.*, 2012].

4.1. Cálculo de Transformada Inversa

Uma forma de resolver equações diferenciais, ordinárias, lineares, com coeficientes constantes, e de ordem qualquer, é realizar uma mudança de domínio, através da aplicação de transformações lineares. Comumente, são utilizadas a Transformada de Fourier (Ordinária) e a Transformada de Laplace (ou de Fourier Complexa).

A mesma ideia é aplicada, no caso da matemática discreta, para resolver equações de diferenças, lineares, com coeficientes constantes, e de ordem qualquer. Nesse caso, normalmente são utilizadas a Transformada de Fourier em Tempo Discreto (*Discrete-Time Fourier Transform* - DTFT) e a Transformada Z.

Em ambos os casos, após realizada a transformação, a equação equivalente no domínio transformado é resolvida. Para finalizar a solução, o resultado obtido no domínio transformado deve sofrer uma transformação inversa. Dado que, no domínio transformado, tais resultados envolvem funções polinomiais racionais, uma das técnicas de cálculo da transformada inversa é quebrar a expressão em frações parciais e inverter cada uma delas independentemente.

4.2 Cálculo da resposta ao impulso de um sistema

No estudo de um Sistema Linear e Invariante ao Tempo (SLIT), o cálculo da sua resposta, provocada por um impulso e por um estado inicial nulo, denominada de resposta ao impulso, é facilitado pelo uso de transformações lineares e de frações parciais, conforme descrito acima.

No caso de um sistema analógico, definido por uma equação diferencial, duas análises são comumente realizadas. Na primeira, a Transformada de Fourier é aplicada à equação diferencial, dando origem à Função Resposta em Frequência $H(j\omega) = \frac{N_H(j\omega)}{D_H(j\omega)}$, que é a transformada da resposta ao impulso, e que possui a forma apresentada na Equação (1), onde a variável v aparece substituída por $j\omega$. Em seguida, a Resposta em Frequência é fatorada em frações parciais. Finalmente, em cada fração é aplicada a Transformada de Fourier Inversa, gerando a Resposta do Impulso $h(t)$ do sistema. Na segunda, a Transformada de Laplace é aplicada à equação diferencial, dando origem à Função de Transferência $H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$, que é a transformada da resposta ao impulso, e que possui a forma apresentada na Equação (1), onde a variável v aparece substituída por $s = \sigma + j\omega$. Em seguida, a Função de Transferência é fatorada em frações parciais. Finalmente, em cada fração é aplicada a Transformada de Laplace Inversa, gerando a Resposta do Impulso $h(t)$ do sistema.

No caso de um sistema em tempo discreto (amostrado) ou de um sistema digital (amostrado e quantizado), definido por uma equação de diferença, duas análises similares são comumente realizadas. Na primeira, a Transformada de Fourier em Tempo Discreto (DTFT) é aplicada à equação de diferença, dando origem à Função Resposta em Frequência $H(e^{j\Omega}) = \frac{N_H(e^{j\Omega})}{D_H(e^{j\Omega})}$, que é a transformada da resposta ao impulso. Posteriormente, a Resposta em Frequência é fatorada em frações parciais. Finalmente, em cada fração é aplicada a DTFT Inversa, gerando a Resposta do Impulso $h[n]$ do sistema. Na segunda, a Transformada Z é aplicada à equação de diferença, dando origem à Função de Transferência (ou Função de Sistema) $H(z) = \frac{N_H(z)}{D_H(z)}$, que é a transformada da resposta ao impulso. Em seguida, a Função de Transferência é fatorada em frações parciais. Finalmente, em cada fração é aplicada a Transformada Z Inversa, gerando a Resposta do Impulso $h[n]$ do sistema.

4.3. Cálculo da resposta genérica de um sistema relaxado

No estudo de um Sistema Linear e Invariante ao Tempo (SLIT), o cálculo da sua resposta, provocada por uma determinada entrada e por um estado inicial nulo (sistema relaxado), é facilitado pelo uso de transformações lineares e de frações parciais, conforme descrito acima.

Uma primeira técnica é utilizar o mesmo procedimento descrito para a resposta ao impulso.

Um mecanismo de cálculo alternativo é baseado no conhecimento prévio da transformada em questão: $H(j\omega)$, $H(s)$, $H(e^{j\Omega})$ ou $H(z)$. Primeiramente, ela é multiplicada pela transformada da entrada. Em seguida, o resultado é fatorado em frações parciais. Finalmente, é aplicada a transformada inversa sobre cada fração parcial.

Deve ser ressaltado que o emprego das transformadas $H(j\omega)$ e $H(e^{j\Omega})$, que representam a Resposta em Frequência do sistema, está relacionado ao cálculo da sua resposta no Regime Permanente (ou Estado Estacionário). Por sua vez, o uso das transformadas $H(s)$ e $H(z)$, que representam a Função de Transferência do sistema, está ligado ao cálculo da resposta completa: Regime Transitório (ou Transiente) e Regime Permanente.

4.4. Cálculo da resposta genérica de um sistema não relaxado

No estudo de um Sistema Linear e Invariante ao Tempo (SLIT), o cálculo da sua resposta, provocada por uma determinada entrada e por um determinado estado inicial não nulo (sistema não relaxado), é facilitado pelo uso de transformações lineares e de frações parciais, conforme descrito acima.

Nesse caso, pode-se utilizar o mesmo procedimento descrito para o sistema relaxado, porém utilizando agora as condições iniciais.

4.5. Implementação de sistemas utilizando estrutura paralela

No estudo de sistemas lineares e invariantes ao tempo (SLIT), analógicos e descritos por equações diferenciais ou amostrados (ou ainda digitais) e descritos por equações de diferenças, verifica-se que os mesmos podem ser implementados de diversas formas diferentes. Primeiramente, uma transformação da equação de definição (Transformada de Laplace ou Transformada Z) conduz à Função de Transferência do sistema ($H(s)$ ou $H(z)$), que é a uma função polinomial racional. De acordo com a fatoração adotada para a Função de Transferência, diversas estruturas podem ser propostas para a implementação do sistema. Por exemplo, pode-se optar por uma implementação realizada através de blocos funcionais de menor complexidade (funções polinomiais de menor ordem), onde seja mais fácil identificar parâmetros de interesse e mapear parâmetros entre domínios (tempo e frequência). Nesse sentido, a fatoração em frações parciais fornece, de forma geral, uma alternativa de implementação composta por um arranjo paralelo (soma) de blocos com menor complexidade e com características mais facilmente identificadas. No entanto, deve ser ressaltado que, no caso de uma Função de Transferência com pólos múltiplos, a fatoração desses pólos não é recomendada, a não ser em um caso particular, como será mostrado a seguir.

5. FÓRMULAS PARA O CÁLCULO DOS COEFICIENTES DAS FRAÇÕES PARCIAIS

Considerando-se uma função polinomial racional própria $F_P(v) = \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P(v)}}$, com diferentes tipos de pólos λ_i (simples/múltiplo, real/complexo), podem-se definir fórmulas para o cálculo dos coeficientes das frações parciais em cada caso.

Pode-se provar que pólos múltiplos (reais/complexos) geram polinômios genéricos do tipo

$$F_P(v) = \frac{N_{F_P}(v)}{(v-\lambda)^r}$$
$$= \frac{k_0}{(v-\lambda)^r} + \frac{k_1}{(v-\lambda)^{r-1}} + \cdots + \frac{k_{r-2}}{(v-\lambda)^2} + \frac{k_{r-1}}{(v-\lambda)},$$

onde r é a multiplicidade do pólo λ.

Pode-se mostrar que as constantes k_i são calculadas por

$$k_i = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{dv^i}\left[(v-\lambda)^r F_P(v)\right]\Big|_{(v=\lambda)}, \qquad i = 1,2,\cdots,(r-1), \tag{2}$$

onde $i! = [i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \cdots 2 \cdot 1]$, para $i \in \mathbb{N}^*$, e, por definição, $0! = 1$.

Aqui, alguns pontos merecem destaque. Primeiramente, deve ser notado que a Equação (2) é um caso geral para os casos de pólo simples (reais/complexos). Além disso, a fatoração completa se faz obrigatória apenas para o caso geral. Em casos particulares, algumas das frações podem não ser necessárias, anulando-se os respectivos coeficientes. Finalmente, exceto no caso onde apenas o coeficiente k_0 seja não nulo, a expansão em frações parciais não será útil para a realização de um sistema usando uma estrutura em paralelo, se o mesmo possuir pólos múltiplos.

No tutorial elaborado, são apresentados todos os casos. Mais detalhes sobre os tópicos abordados nessa seção podem ser encontrados nas seguintes referências: [IEZZI *et al*., 1995], [LATHI, 1998], [MITRA, 1998], [OPPENHEIM *et al*., 1983], [STEWART, 2009] e [ZILL *et al*., 2012].

6. EXEMPLOS DE COMPOSIÇÃO DE FRAÇÕES PARCIAIS

Com o objetivo de tentar melhorar a compreensão do procedimento de obtenção das frações parciais a partir das funções racionais, foram desenvolvidos, no sentido inverso, alguns exemplos de composição de frações parciais, a fim de gerar funções racionais.

A ideia básica foi a seguinte. Na demonstração de fórmulas gerais, muitas vezes, inicia-se por exemplos simples e depois, por inferência, obtém-se uma forma genérica ou desenvolve-se um conceito básico que irá ser usado para gerar a forma genérica. Por outro lado, na utilização de uma fórmula geral, muitas vezes, a visualização do processo de cálculo com exemplos simples facilita a compreensão da ideia geral que a formulação possui. Baseados nessa ideia foram matematicamente calculados vários exemplos de composição de frações parciais, produzindo funções racionais próprias $F_P(v) = \frac{N_{F_P}(v)}{D_{F_P}(v)}$ com diferentes relações entre os graus dos polinômios $N_{F_P}(v)$ e $D_{F_P}(v)$.

As composições foram criadas através da combinação de frações parciais de diferentes tipos, levando em consideração: i) o tipo de coeficiente da fração parcial (real/complexo) e ii) o tipo de pólo (real/complexo e simples/múltiplo).

A Tabela 1 apresenta um resumo dos exemplos construídos e os seus resultados. As composições foram de três tipos básicos: dois pólos simples, apenas um pólo múltiplo e um pólo múltiplo combinado com um pólo simples. No caso de um pólo múltiplo, foram construídos dois tipos de exemplos: apenas a fração de mais alto grau e todas as frações (do grau mais alto até o grau unitário). Por sua vez, os resultados são indicados pelo número do exemplo, dentro do documento final, e pelos tipos de função racional gerados, que foram: i) "Geral", para $g(N_{F_P}) = g(D_{F_P}) - 1$, ii) "Não geral", para $g(N_{F_P}) < g(D_{F_P}) - 1$ e iii) "X", para não realizável, onde $g(P)$, significa o grau do polinômio P. Os exemplos não finalizados e os não construídos até a data da elaboração deste artigo foram indicados, respectivamente, como "Terminar" e "Fazer".

Foge ao escopo deste trabalho apresentar cada exemplo construído. O documento final elaborado pode ser obtido por *download* gratuito no *website* do Grupo PET-Tele, através da seguinte URL: *http://www.telecom.uff.br/pet, seguindo os links Downloads → Tutoriais.*

Tabela 1: Tabela resumo dos exemplos calculados para a composição de frações parciais calculados.

Pólo	Composição		Coeficiente da fração parcial	
			Real	Complexo
Real	Simples + Simples		Ex.1 – Geral	Ex.2 – X
	Múltiplo apenas	Fração única	Ex.5 - Não Geral	Ex.5 – X
		Todas as frações	Ex.6 – Geral	Ex.6 – X
	Múltiplo + Simples	Fração única	Ex.7 - Não geral	Ex.7 – X
		Todas as frações	Ex.8 – Geral	Ex.8 – X
Complexo	Simples + Simples		Ex.3 - Não geral	Ex.4 – Geral
	Múltiplo apenas	Fração única	Ex.9 - Não geral	Ex.10 - Não geral
		Todas as frações	Ex.11 – Terminar	Ex.12 – Terminar
	Múltiplo + Simples	Fração única	Fazer	Fazer
		Todas as frações	Fazer	Fazer

7. CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Atendendo a um dos requisitos do Programa PET, integrantes do Grupo PET-Tele identificaram um tema para elaboração de material didático e realizaram a atividade. A expansão de funções algébricas racionais em frações racionais foi escolhida por ser um tema comum em várias disciplinas do curso e, por vezes, não ser tão facilmente absorvido. Foi realizado um estudo sobre o assunto e um documento autoral foi elaborado. Espera-se que tal documento seja útil aos alunos da graduação para um melhor entendimento do tema.

Durante a elaboração deste artigo, o documento final ainda não estava concluído. Portanto, embora eles já tenham sido iniciados a partir do envio deste artigo, são indicados como trabalhos futuros: i) a inclusão de exemplos numéricos sobre a utilização das fórmulas para o cálculo dos coeficientes das frações parciais, ii) a finalização da lista de exemplos de composição de frações parciais e iii) a inclusão de código para o Ambiente de Simulação Matemática MATLAB, como ferramenta auxiliar no estudo do tema. Além disso, pretende-se realizar manutenção periódica sobre o documento final, como é prática do grupo.

AGRADECIMENTOS

O grupo PET-Tele da UFF faz parte do Programa de Educação Tutorial (PET), financiado pelo Ministério da Educação (MEC).

Os autores agradecem aos demais integrantes do grupo PET-Tele e aos alunos da graduação que leram o documento original, fornecendo algumas sugestões para a versão atual.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** 3.ed. Rio de Janeiro, RJ: Guanabara Dois, 1979. 587p, il.

DE LA VEGA, A. S. **Apostila de Teoria para Circuitos Elétricos V** (Versão: Setembro/2005). Niterói, RJ: Universidade Federal Fluminense, 2005. 131p, il.

DE LA VEGA, A. S. **Apostila de Teoria para Processamento Digital de Sinais** (VersãoA2013M04D06). Niterói, RJ: Universidade Federal Fluminense, 2013. 191p.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; DOLCE, O.; HAZZAN, S.; POMPEU, J. N.; MACHADO, N. **Fundamentos da Matemática Elementar**. São Paulo, SP: Atual Editora, 1995.242p, il.

LATHI, B. P. **Modern Digital and Analog Communication Systems**. 2.ed. Philadelphia, PA: Holt, Rinehart and Wiston, 1998.719p, il.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Apresentação – PET (Programa de Educação Tutorial).** Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12223&ativo=481&Itemid=480> Acesso em: 05 jun. 2013.

MITRA, S. K. **Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach.** New York, NY: McGraw-Hill, 1998.864p, il.

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. **Circuitos Elétricos.** 8.ed. São Paulo,SP: Pearson Prentice Hall Editora, 2009.574p, il.

OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S.; YOUNG, I. T. **Signals and Systems**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983.796p, il.

PET-TELE. **PET - Engenharia de Telecomunicações da UFF.**
Disponível em: <http://www.telecom.uff.br/pet> Acesso em: 05 jun. 2013.

STEWART, J. **Cálculo**.6.ed. :CENGAGE LEARNING, v.1, 2009.688p, il.

ZILL, D. G.; M. S. Cullen. **Equações Diferenciais**. 3.ed. São Paulo,SP: Pearson Makron, v. 1, 2012.473p, il.

STUDY AND DEVELOPMENT OF TEACHING MATERIALS ON PARTIAL FRACTIONS APPLIED TO ANALOG AND DIGITAL SYSTEMS

Abstract: *The aim of this work was the study and the development of teaching materials on the expansion of rational algebraic functions into partial fractions. The issue in question is found both in some basic subjects as in some specific ones in the Undergraduate Course on Engineering, which involve the analysis and design of analog and digital systems. Among the various motivations, it may be cited the practice of generation of copyrighted material, from the students point of view and based on the needs presented by them. The final document is available at the website mantained by Grupo PET-Tele, for free download.*

Key-words: *Programa de Educação Tutorial (PET), Teaching Materials Development, Rational Algebraic Function, Partial Fraction Expansion, Analog and Digital Systems.*