Apostila
de
Nivelamento
para
Fundamentos de
Processamento Digital de Sinais

Sinais e Sistemas
com
Matemática Discreta

(Versão A2025M03D17)

Universidade Federal Fluminense

Alexandre Santos de la Vega

Departamento de Engenharia de Telecomunicações – TET

Escola de Engenharia – TCE

Universidade Federal Fluminense – UFF

Março – 2025

.

621.3192 (*) D278 (*) 2025	de la Vega, Alexandre Santos Apostila de Nivelamento para Processamento Digital de Sinais / Alexandre Santos de la Vega. – Niterói: UFF/TCE/TET, 2025. 46 (sem romanos) ou 68 (com romanos) p. (*) Apostila de Nivelamento – Graduação, Engenharia de Telecomunicações, UFF/TCE/TET, 2025. 1. Processamento de Sinais. 2. Processamento Digital de Sinais. 3. Telecomunicações. I. Título.

(*) OBTER INFO NA BIBLIOTECA, ATUALIZAR E PEDIR NOVO REGISTRO !!!

Aos meus alunos.

Prefácio

O trabalho em questão aborda os tópicos a serem apresentados na disciplina Fundamentos de Processamento Digital de Sinais. O material completo, dividido em apostilas e tutoriais, encontra-se dividido nos seguintes volumes:

1. O conteúdo teórico pode ser encontrado no volume entitulado Apostila de Teoria para Fundamentos de Processamento Digital de Sinais.

2. O conteúdo prático pode ser encontrado no volume entitulado Apostila de Códigos de Programas Demonstrativos para Fundamentos de Processamento Digital de Sinais.

3. As especificações dos trabalhos extra classe propostos na disciplina podem ser encontradas no volume entitulado Apostila de Trabalhos Extra Classe de Exercício e de Código (TEC) para Fundamentos de Processamento Digital de Sinais.

4. Conteúdos matemáticos básicos, necessários à disciplina em questão, são abordados no volume entitulado Apostila de Nivelamento para Fundamentos de Processamento Digital de Sinais.

5. Uma abordagem integradora dos tópicos de interesse da disciplina, de forma simples e direta, utilizando o sistema de média móvel como exemplo, pode ser encontrado no volume entitulado Tutorial sobre Sistema de Média Móvel para Fundamentos de Processamento Digital de Sinais.

6. Um conteúdo associado com Teoria de Sistemas, Teoria de Controle, Teoria de Circuitos e Teoria de Processamento de Sinais, envolvendo aspectos teóricos e códigos de programas demonstrativos, pode ser encontrado no volume entitulado Tutorial sobre Influência dos zeros e dos pólos da Função de Transferência no formato da função Resposta em Frequência para Fundamentos de Processamento Digital de Sinais.

Os documentos foram escritos com o intuito de servir como uma referência rápida para os alunos dos cursos de graduação e de mestrado em Engenharia de Telecomunicações da Universidade Federal Fluminense (UFF). O material básico utilizado para o conteúdo teórico foram as minhas notas de aula, que, por sua vez, originaram-se em uma coletânea de livros sobre os assuntos abordados. Por outro lado, os códigos de programas demonstrativos e as especificações dos trabalhos propostos são completamente autorais.

A motivação inicial para o desenvolvimento desse trabalho foi a de aumentar o dinamismo das aulas. Logo, deve ficar bem claro que os documentos produzidos não pretendem substituir os livros textos ou outros livros de referência. Pelo contrário, espera-se que eles sejam utilizados como ponto de partida para estudos mais aprofundados, utilizando-se a literatura existente.

Espero conseguir manter o presente texto em constante atualização e ampliação.

Correções e sugestões são sempre bem-vindas.

Alexandre Santos de la Vega
UFF / TCE / TET

Agradecimentos

Àqueles professores do Departamento de Engenharia de Telecomunicações (TET), da Escola de Engenharia (TCE), da Universidade Federal Fluminense (UFF), que colaboraram com críticas e sugestões bastante úteis à finalização da versão inicial deste trabalho.

Aos ex-funcionários do TET, Arlei, Carmen Lúcia, Eduardo Wallace, Francisco e Jussara, pelo apoio constante.

Aos meus alunos, que, além de servirem de motivação principal, obrigam-me sempre a me tentar melhorar, em todos os sentidos.

Mais uma vez, e sempre, aos meus pais, por tudo.

Alexandre Santos de la Vega
UFF / TCE / TET

Apresentação do material didático

Metodologia de construção

- O material aqui apresentado não é fruto de um projeto educacional envolvendo idealização, planejamento, pesquisa, estudo, estruturação, desenvolvimento, revisão e edição.
- Pelo contrário, ele nasceu, evoluiu e tem sido mantido de uma forma bem orgânica.

Histórico

- Em 1995, o autor ingressou no Departamento de Engenharia de Telecomunicações (TET) da Universidade Federal Fluminense (UFF) e, desde então, tem sido responsável por diversas disciplinas oferecidas pelo TET para o Curso de Engenharia de Telecomunicações, da Escola de Engenharia da UFF (TCE/UFF), e para o Curso de Ciência da Computação, do Instituto de Computação da UFF (IC/UFF).
- Na época do seu ingresso, o Processamento Digital de Sinais já era um assunto presente na área de Telecomunicações. E com importância crescente. Apesar disso, ainda não era oferecida pelo TET uma disciplina formal sobre a matemática que o fundamenta.
- Com essa percepção, ele criou a disciplina optativa "Introdução ao Processamento Digital de Sinais", em 1998.
- Para dar suporte às aulas, foram elaboradas as primeiras notas de aula (manuscritas) para a disciplina optativa criada no TET. Nessa primeira tentativa de implantação da disciplina, foi usada a referência [Mit98] como livro texto.
- A disciplina optativa foi oferecida pelo autor apenas durante dois períodos letivos, em virtude do seu afastamento para finalização do seu doutoramento.
- Durante o afastamento, e mesmo algum tempo depois, a disciplina optativa foi oferecida por outro professor do TET. Nesse período, o autor lançou uma outra disciplina optativa, vinculada à primeira, tratando do Projeto de Filtros Digitais.
- Tendo voltado a ministrar a disciplina, o autor decidiu ampliar as notas de aula manuscritas, baseando-se em diversos outros livros.
- Na primeira década de 2000, o TET realizou uma reforma curricular e a disciplina optativa "Introdução ao Processamento Digital de Sinais" tornou-se obrigatória, sob o nome de "Processamento Digital de Sinais".

- Em 2008, com os objetivos iniciais de melhor organizar os manuscritos e de atender aos apelos dos alunos por cópia dos manuscritos, eles foram apenas transcritos para o Sistema de Preparação de Documentos LaTeX [KD04] , [MG04]. Assim, surgiu a primeira versão da apostila de teoria.
- A partir daí, com a maturação gradual que a disciplina foi ganhando a cada período letivo, novos conteúdos foram surgindo. Ora por curiosidade do autor, procurando incorporar um determinado tópico na disciplina. Ora por curiosidade dos alunos, por demandarem algum assunto em especial. Ora por necessidade pedagógica, pois, ao se perceberem dúvidas recorrentes dos alunos, novas formas de abordagem têm sido testadas.
- Além disso, como filosofia educacional do autor, as questões que fazem parte de toda e qualquer forma de avaliação formal da disciplina (testes, provas, trabalhos) são anexadas ao conteúdo, na forma de exercícios propostos.
- No final da década de 2010, o TET realizou uma nova reforma curricular, a qual acarretou uma redução na quantidade e na carga horária das disciplinas. Isso provocou uma reformulação na abordagem dos tópicos da disciplina, que passou a ser denominada de "Fundamentos de Processamento Digital de Sinais".
- Ainda como filosofia educacional do autor, a apostila de teoria não apresenta figuras que ilustrem os assuntos abordados. Pelo contrário, é demandado aos alunos que eles gerem as suas próprias figuras, a partir de um aplicativo computacional adequado.
- Desde 2011, objetivando incentivar os alunos a modificarem códigos existentes e a gerarem seus próprios códigos, uma nova apostila tem sido elaborada, contendo códigos para programas demonstrativos, relativos aos tópicos abordados na apostila de teoria, em sala de aula e/ou em alguma forma de avaliação formal da disciplina.
- A partir de 2016, com a incorporação de trabalhos semanais na prática da disciplina, uma nova apostila tem sido elaborada, contendo os trabalhos extra classe (TEC) propostos a cada período letivo.
- Em 2018, foi percebido que, utilizando o sistema de média móvel como exemplo, é possível abordar e integrar os tópicos de interesse da disciplina de forma simples e direta. Além disso, com ele, também é possível gerar exemplos, exercícios e aplicações práticas, com certa facilidade. Assim, teve início a elaboração do tutorial sobre o sistema de média móvel.
- Em 2019, foi iniciado um tutorial sobre a influência dos zeros e dos pólos da Função de Transferência no formato da função Resposta em Frequência, buscando atender a uma série de motivações, listadas no documento em questão.
- A partir do isolamento social, imposto pela Pandemia de COVID-19, nos anos de 2020 e 2021, foi notada uma deficiência relativa aos conteúdos matemáticos básicos de Matrizes, Números complexos e Polinômios, necessários à disciplina em questão.
- A princípio, tais conteúdos foram apenas abordados em aulas iniciais de revisão. Em seguida, um texto inicial foi anexado à apostila de teoria, na forma de apêndices. Por fim, a partir de 2025, uma apostila de nivelamento, foi incorporada ao conjunto dos materiais autorais produzidos.

Comentários gerais:

- Conforme foi exposto acima, desde o início da sua confecção até o presente momento, sempre foram preparadas diversas versões de cada documento ao longo de um mesmo período letivo. Por essa razão, o identificador "Versão A<ano>M<mês>D<dia>" aparece logo abaixo do título de cada apostila.
- No tocante à apresentação do conteúdo teórico, os manuscritos originais continham apenas tópicos, destinados à abordagem do conteúdo programático durante as aulas. Pode-se dizer que tais manuscritos representavam apenas um roteiro de aula. Gradativamente, com a evolução da apostila de teoria, os tópicos têm sido trocados por textos dissertativos, relativos ao conteúdo abordado.
- No ponto de vista estrutural é que o aspecto dinâmico dos documentos mais se tem feito presente. Buscando uma melhor apresentação dos tópicos abordados, os diversos seccionamentos de texto (capítulos, seções, subseções, etc.) comumente surgem, são mesclados e desaparecem, a cada nova versão.
- Por tudo isso, pode-se asseguradamente dizer que todo o material produzido encontra-se em constante atualização.
- Na preparação das aulas, têm sido utilizados os seguintes livros:
  - Livros indicados pela ementa da disciplina: [DdSN10], [Mit98].
  - Outros livros indicados: [Rob09], [PM06], [Jac96], [She95], [SK89], [Ant86], [SDD84], [OWY83], [PL76], [OS75], [Cad73].

Teoria abordada no material didático

- Introdução <2 horas>
  - Conceitos básicos: que busca contextualizar a disciplina no âmbito do curso e apresentar conceitos que serão necessários ao longo do texto. <2 horas>
  - Conexão entre os modelos analógico e discreto/digital: que apresenta um resumo das representações dos sinais analógicos no domínio da freqüência e aborda as duas formas de conexão entre os domínios analógico e digital. [Opcional]
- Sinais e sistemas (com tempo discreto) no domínio do tempo <12 horas>
  - Sinais no domínio do tempo: definições, classificações, operações, exemplos e caracterizações. <4 horas>
  - Seqüências exponenciais: características relevantes de exponenciais, funções com dependência exponencial, decomposição de funções usando exponenciais, amostragem de sinais contínuos no tempo. <4 horas>
  - Sistemas no domínio do tempo: definições, classificações, operações, exemplos e caracterizações. <4 horas>
- Representações de um Sistema Linear e Invariante ao Tempo (SLIT) <10 horas>
  - Resposta ao impulso. <1 hora>
  - Diagramas de blocos de complexidade genérica. <1 hora>
  - Equação de diferença. <1 hora>
  - Diagramas de sistema (ou estruturas ou realizações). <2 horas>
  - Operador de transferência. <1 hora>
  - Diagrama de pólos e zeros do operador de transferência. <2 horas>
  - Equações de estado. <2 horas>
  - Relações e mapeamentos entre as diversas representações. <distribuído ao longo da apresentação do conteúdo e exercitado na forma de trabalhos>
- Respostas de um Sistema Linear e Invariante ao Tempo (SLIT) <10 horas>
  - Cálculos da resposta de um SLIT <8 horas>
    - Cálculo da resposta de um SLIT baseado na solução das equações de estado. <1 hora>
    - Cálculo da resposta de um SLIT baseado no uso do operador de transferência. <1 hora>

    * Cálculo da resposta de um SLIT baseado na solução convencional da equação de diferença. <4 horas>
    * Cálculo da resposta de um SLIT FIR (Resposta ao Impulso Finita) com entrada de comprimento indefinido. <2 horas>
  - Tipos de resposta de um SLIT <2 horas>
    * Resposta completa.
    * Resposta homogênea + resposta do sistema relaxado (resposta particular + resposta complementar).
    * Resposta ao estado + resposta à entrada.
    * Resposta natural + resposta forçada.
    * Resposta transitória + resposta permanente.

- Noções da representação em domínio transformado para sistemas de primeira ordem [Opcional]
  - Resposta em Freqüência: baseado no cálculo da resposta de um SLIT de primeira ordem, para um determinado tipo de sinal de entrada, pode-se identificar um novo tipo de representação para o sistema.
  - Função de Transferência: baseado no cálculo da resposta de um SLIT de primeira ordem, para um determinado tipo de sinal de entrada, pode-se identificar um novo tipo de representação para o sistema.

- Sinais e sistemas (com tempo discreto) no domínio da freqüência <20 horas>
  - Sinais <10 horas>
    * Motivações para a mudança de domínio de uma representação. <1/2 hora>
    * Revisão das representações em freqüência com tempo contínuo (Série de Fourier, Transformada de Fourier e Transformada de Laplace). <1/2 hora>
    * Série de Fourier de Tempo Discreto (DTFS). <1 hora>
    * Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT). <2 horas>
    * Transformada de Fourier Discreta (DFT). <2 horas>
    * Transformada Z. <2 horas>
    * Relações entre as diversas representações em freqüência, parâmetros e efeitos importantes. <2 horas>
  - Técnicas básicas para aceleração do cálculo da DFT. [Opcional]
  - Aplicações básicas da Transformada Z em sinais e sistemas. <6 horas>
    * Transformada Z de alguns sinais importantes.
    * Transformada Z aplicada na convolução.
    * Transformada Z aplicada em sinais deslocados.
    * Transformada Z aplicada na equação de diferença.
    * Transformada Z no cálculo de respostas de um SLIT.

  - SLIT de ordem qualquer <4 horas>
    * Tipos de respostas de um sistema.
    * Resposta completa em domínio transformado.
    * Resposta em Freqüência.
    * Seletividade em Freqüência.
    * Função de Transferência ou Função de Sistema.
    * Representações de um SLIT no domínio da freqüência.

- Aplicações: exemplos de aplicações são distribuídos ao longo do texto e exercitados na forma de trabalhos.

Objetivos da disciplina

- Apresentar a base matemática que fundamenta o Processamento Digital de Sinais.
- Trabalhar com sistemas que apresentem as seguintes características:
  - Sistema Linear e Invariante ao Tempo (SLIT).
  - Sistema *Single-Input Single-Output* (SISO).
  - Sistema operando com tempo discreto.
  - Sistema operando com sinais definidos em tempo discreto, quantizados (digitais) ou não (amostrados).
- Trabalhar com sinais básicos que sejam simultaneamente dependentes das variáveis tempo e freqüência, utilizando-os na composição dos demais sinais envolvidos.
- Discutir a análise de sistemas no domínio da variável tempo e no domínio da variável freqüência. No domínio do tempo, o foco está na FORMA que os sinais apresentam. No domínio da freqüência, o foco está na COMPOSIÇÃO que os sinais apresentam.
- Discutir a aplicação dos conceitos de Operador de Transferência (no domínio do tempo) e de Função de Transferência (no domínio da freqüência), bem como a relação existente entre ambos.
- Discutir a aplicação do conceito de estado de um sistema e da análise do sistema no espaço de estados.

Sumário

Parte I

Introdução

Capítulo 1

Introdução

O presente documento apresenta um material a ser utilizado como uma revisão de conteúdos, visando um nivelamento de teoria e um nivelamento de programação.

1.1 Nivelamento sobre teoria

A disciplina Fundamentos de Processamento Digital de Sinais aborda conceitos matemáticos comumente utilizados na área de Processamento Digital de Sinais. Em resumo, a disciplina trata da área matemática de Sinais e Sistemas com Matemática Discreta.

Para que se possa trabalhar o conteúdo principal da disciplina, alguns tópicos matemáticos são considerados pré-requisitos. Assim, espera-se que os alunos possuam conhecimentos básicos em tais conteúdos, que serão diretamente aplicados e/ou empregados como ferramentas de apoio ao longo da disciplina.

A partir da constatação de uma nítida falta de domínio dos pré-requisitos necessários, foi montado o presente texto, que procura apresentar uma revisão dos principais itens de cada tópico, incluindo aqueles que são diretamente necessários à disciplina em questão.

1.2 Nivelamento sobre programação

Uma vez que a disciplina trabalha com matemática discreta, visando gerar simulações e/ou aplicações finais em *hardware* digital, alguns conceitos de programação também são considerados pré-requisitos para um bom desempenho do código desenvolvido.

Dado que nem todos os alunos apresentam domínio sobre algumas técnicas comumente empregadas, o presente texto procura ainda incorporar um conjunto de tópicos de apoio.

Parte II

Nivelamento sobre teoria

Capítulo 2

Revisão de matrizes

2.1 Definição

Dados dois números L e C, naturais e não nulos, define-se uma matriz "L por C" ($L \times C$) como uma tabela de elementos m_{lc}, onde $1 \leq l \leq L$ e $1 \leq c \leq C$, distribuídos por L linhas e C colunas.

2.2 Representações

É comum designar-se uma matriz por um letra maiúscula e em negrito, tal como $\boldsymbol{M}$, ou ainda indicando as suas dimensões, tal como $\boldsymbol{M}_{L\times C}$.

Dadas as dimensões $L = 2$ e $C = 3$, bem como os índices l e c, onde $1 \leq l \leq L$ e $1 \leq c \leq C$, representações comuns para uma matriz são as seguintes:

$$\boldsymbol{M}_{2\times 3} = (m_{lc})_{2\times 3} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{M}_{2\times 3} = (m_{lc})_{2\times 3} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix} .$$

O acesso ao elemento m_{lc}, de uma matriz $\boldsymbol{M}_{L\times C}$, pode ser indicado por $\boldsymbol{M}$[l,c] ou $\boldsymbol{M}$(l,c).

2.3 Matrizes particulares

Podem-se definir os seguintes tipos de matrizes particulares:

- Matriz linha ou vetor linha: $L = 1$.
- Matriz coluna ou vetor coluna: $C = 1$.
- Matriz quadrada: $L = C$.
- Matriz nula: $m_{lc} = 0$, $\forall l$ e $\forall c$.

Podem-se definir os seguintes tipos de matrizes quadradas ($L = C$) particulares:

- Matriz diagonal: $m_{lc} = 0$, $\forall\ l \neq c$.
- Matriz (diagonal) unidade, unitária ou identidade: $m_{lc} = 0$, $\forall\ l \neq c$ e $m_{lc} = 1$, $\forall\ l = c$.
- Matriz triangular inferior: $m_{lc} = 0$, $\forall\ l < c$.
- Matriz triangular superior: $m_{lc} = 0$, $\forall\ l > c$.
- Matriz simétrica: $m_{lc} \in \mathbb{R}$, $m_{lc} = m_{cl}$, $\forall l$ e $\forall c$.
- Matriz anti-simétrica: $m_{lc} \in \mathbb{R}$, $m_{lc} = -m_{cl}$, $\forall l$ e $\forall c$.
- Matriz Hermitiana ou autoadjunta: $m_{lc} \in \mathbb{C}$, $m_{lc} = m_{cl}^*$, $\forall l$ e $\forall c$.
- Matriz anti-Hermitiana: $m_{lc} \in \mathbb{C}$, $m_{lc} = -m_{cl}^*$, $\forall l$ e $\forall c$.

Em uma matriz quadrada, onde $L = C = N$, podem-se definir as seguintes estruturas:

- Diagonal principal: conjunto dos elementos m_{lc}, onde $l = c$.
- Diagonal secundária: conjunto dos elementos m_{lc}, onde $(l + c) = (N + 1)$.

2.4 Operações básicas

2.4.1 Igualdade

Para que duas matrizes de mesmas dimensões, $\boldsymbol{A}_{L\times C}$ e $\boldsymbol{B}_{L\times C}$, sejam consideradas iguais, a seguinte relação deve cumprida: $\boldsymbol{A}_{L\times C} = \boldsymbol{B}_{L\times C} \Leftrightarrow a_{lc} = b_{lc}$, $\forall l$ e $\forall c$.

2.4.2 Adição e subtração

Dadas as matrizes $\boldsymbol{A} = (a_{lc})_{L\times C}$ e $\boldsymbol{B} = (b_{lc})_{L\times C}$, a sua soma produz uma nova matriz $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{M} = (m_{lc})_{L\times C}$, onde $m_{lc} = a_{lc} + b_{lc}$, $\forall l$ e $\forall c$.

A partir da matriz $\boldsymbol{A} = (a_{lc})_{L\times C}$, define-se a matriz oposta de $\boldsymbol{A}$ como $-\boldsymbol{A} = (-a_{lc})_{L\times C}$, $\forall l$ e $\forall c$, de tal forma que $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$. Com isso, a subtração matricial pode ser definida por $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$.

2.4.3 Multiplicação

Multiplicação entre elemento e matriz

Dados o elemento a e a matriz $\boldsymbol{B} = (b_{lc})_{L\times C}$, a sua multiplicação produz uma nova matriz $a \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{M} = (m_{lc})_{L\times C}$, onde $m_{lc} = a \cdot b_{lc}$, $\forall l$ e $\forall c$.

Multiplicação entre matrizes

Dadas as matrizes $\boldsymbol{A} = (a_{ln})_{L\times N}$ e $\boldsymbol{B} = (b_{nc})_{N\times C}$, a sua multiplicação produz uma nova matriz $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{M} = (m_{lc})_{L\times C}$, onde $m_{lc} = \sum_{n=1}^{N}(a_{ln} + b_{nc})$, $\forall l$ e $\forall c$.

2.4.4 Matriz inversível e matriz singular

A partir da matriz quadrada $\boldsymbol{A} = (a_{lc})_{N\times N}$, define-se a matriz inversa de $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{A}^{-1}$, de tal forma que $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$. Com isso, a divisão matricial, entre matrizes quadradas, pode ser definida por $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^{-1}$.

Nem toda matriz quadrada possui uma inversa. Quando a sua inversa existe, a matriz é dita inversível. Caso contrário, ela é denominada matriz singular.

2.4.5 Transposição

A partir da matriz $\boldsymbol{A} = (a_{lc})_{L\times C}$, define-se a matriz transposta de $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{A}^T = (a_{cl})_{C\times L}$, $\forall l$ e $\forall c$.

Do ponto de vista estrutural, pode-se dizer que as linhas (ou colunas) de $\boldsymbol{A}$ são as colunas (ou linhas) de $\boldsymbol{A}^T$.

2.5 Referências

Os tópicos abordados neste capítulo podem ser encontrados, com mais detalhes, em [IMD+85].

2.6 Exercícios propostos

1. Monte as seguintes matrizes:
   - $\boldsymbol{M}_{2\times 3}$, tal que $m_{lc} = (l + c)$.
   - $\boldsymbol{M}_{3\times 2}$, tal que $m_{lc} = (l \cdot c)$.

2. Monte as seguintes matrizes:
   - $\boldsymbol{M}_{1\times 3}$, tal que $m_{lc} = (l)^c$.
   - $\boldsymbol{M}_{3\times 1}$, tal que $m_{lc} = (c)^l$.
   - $\boldsymbol{M}_{3\times 3}$, tal que $m_{lc} = (-1)^{(l+c)}$.

3. Realize as seguintes operações:
   - $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 3 & 7 & 11 \end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
   - $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

4. Demonstre as seguintes relações:
   - $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$.
   - $(\boldsymbol{A}_{L\times N} \cdot \boldsymbol{B}_{N\times C})^T = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T$.
   - $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$.
   - $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$.

Capítulo 3

Revisão de números complexos

3.1 Definição do corpo dos números complexos

Dado que

- $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ é o produto cartesiano
- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \quad e \quad y \in \mathbb{R}\}$

e supondo-se as seguintes definições, envolvendo os elementos (a, b) e (c, d), de $\mathbb{R}^2$:

1) igualdade:	$(a, b) = (c, d)$	$\Longleftrightarrow$	$a = c \quad \text{e} \quad b = d$
2) adição:	$(a, b) + (c, d)$	$\Longleftrightarrow$	$(a + c, b + d)$
3) multiplicação:	$(a, b) \cdot (c, d)$	$\Longleftrightarrow$	$(ac - bd, ad + bc)$

pode-se definir que

- $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos
- $z \in \mathbb{C}$ é um número complexo
- $\mathbb{C} = \{z = (x, y) \mid x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R} \;\text{ e as definições (1) a (3) são válidas }\}$.

3.2 Representações dos números complexos

3.2.1 Forma algébrica ou retangular

Considerando-se o subconjunto

$$\mathbb{R}' = \{(a, b) \in \mathbb{C} \mid b = 0\} \ ,$$

pode-se mostrar que operar com o número complexo $(x, 0)$ é equivalente a operar com o número real x. Logo, existe um isomorfismo entre $\mathbb{R}'$ e $\mathbb{R}$, de tal forma que

$$x = (x, 0), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \ .$$

Levando-se em consideração a unidade real 1, de tal forma que $1 = (1, 0)$, e definindo-se o número complexo $(0, 1)$ como a unidade imaginária e o símbolo $i = (0, 1)$, tem-se que

$$i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$$

e, de forma geral, para $n \in \mathbb{N}$, que

$$\begin{aligned} i^{4n} &= 1 = (1,0) \ , \\ i^{4n+1} &= i = (0,1) \ , \\ i^{4n+2} &= -1 = (-1,0) \ , \\ i^{4n+3} &= -i = (0,-1) \ . \end{aligned}$$

Assim, um número complexo qualquer z pode ser escrito na seguinte forma algébrica, denominada forma retangular:

$$\begin{aligned} z &= (x, y) \\ &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, 0) \cdot (1, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) \\ &= x \cdot 1 + y \cdot i \\ &= x + y \cdot i \ , \end{aligned}$$

onde $x = Re\{z\}$ é a parte real de z e $y = Im\{z\}$ é a parte imaginária de z.

Pode-se, então, definir a seguinte nomenclatura:

$$\begin{array}{lcl} \text{Número complexo} & \rightarrow & z = (x, y) = x + y \cdot i \\ \text{Número real (puro)} & \rightarrow & z = (x, 0) = x + 0 \cdot i = x \\ \text{Número imaginário (puro)} & \rightarrow & z = (0, y) = 0 + y \cdot i = y \cdot i \quad (y \neq 0) \ . \end{array}$$

3.2.2 Números complexos conjugados

Os números complexos z e z^* são ditos complexos conjugados se, e somente se,

$$z = (x, y) = x + y \cdot i \Longleftrightarrow z^* = (x, -y) = x + (-y) \cdot i \ .$$

Neste caso, pode-se mostrar que

$$z = z^* \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R} \ ,$$

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \ ,$$

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^* \ ,$$

$$x = Re\{z\} = \frac{z + z^*}{2}$$

e

$$y = Im\{z\} = \frac{z - z^*}{2 \cdot i} \ .$$

3.2.3 Forma trigonométrica ou polar

Os números complexos ainda podem ser interpretados como pontos em um plano cartesiano, denominado **Plano Complexo** ou **Plano de Argand-Gauss**. Tal plano é exemplificado na Figura 3.1, onde:

$z = (x, y)$	é um número complexo,
$x0y$	é o plano cartesiano de Argand-Gauss,
$0x$	é o eixo real,
$0y$	é o eixo imaginário,
$P = (x, y)$	é o afixo de z.

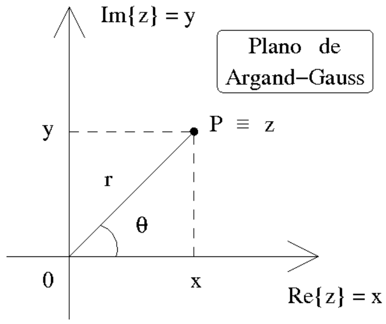

Figura 3.1: Plano de Argand-Gauss.

Deve-se ressaltar que, nessa interpretação, x representa a projeção de z sobre o eixo associado aos números reais puros, enquanto y representa a projeção de z sobre o eixo associado aos números imaginários puros. Como definido na Seção 3.1, ambos os eixos devem conter números reais.

A norma N e o módulo (ou valor absoluto) de z são dados, respectivamente, por

$$N(z) = z \cdot z^* = x^2 + y^2$$

e

$$|z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{x^2 + y^2} = r \ .$$

O argumento (principal) de $z \neq 0$ é dado pelo ângulo Θ, tal que

$$\sin \Theta = \frac{y}{r} = \frac{Im\{z\}}{|z|} \ ,$$

$$\cos \Theta = \frac{x}{r} = \frac{Re\{z\}}{|z|}$$

e

$$\tan \Theta = \frac{y}{x} = \frac{Im\{z\}}{Re\{z\}} \ .$$

Logo, para $z \neq 0$, pode-se escrever que

$$z = (x, y) = x + y \cdot i = r \cdot (\cos \Theta + i \cdot \sin \Theta)$$

e que, para $z = 0$, $r = 0$ e Θ é indefinido.

Deve-se notar que existem infinitos ângulos congruentes a um valor principal $0 \leq \Theta < 2\pi$, que são

$$\Theta_k = (\Theta \pm k \cdot 2\pi) \ , \qquad k \in \mathbb{N} \ . \tag{3.1}$$

Portanto, pode-se dizer que um número complexo $z \neq 0$ possui infinitos argumentos Θ_k e que $0 \leq \Theta < 2\pi$ é o seu argumento principal.

3.2.4 Fórmula de Euler

Dado um ângulo Θ, a identidade de Euler fornece

$$e^{\pm i\Theta} = (\cos\Theta \pm i \cdot \sin\Theta) \, .$$

De acordo com a interpretação geométrica dos números complexos, a identidade de Euler indica que as funções reais $\cos\Theta$ e $\sin\Theta$ são projeções da função complexa $e^{\pm i\Theta}$.

No caso particular de $\Theta = \pi$, tem-se a fórmula de Euler, definida por

$$e^{i\pi} = -1 \ .$$

Para $\Theta = \pm\frac{\pi}{2}$, pode-se escrever

$$e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i \ .$$

3.2.5 Resumo das representações

Com base nas representações descritas acima, pode-se escrever as seguintes relações:

$$z = (x, y) = x + y \cdot i = r \cdot (\cos\Theta + i \cdot \sin\Theta) = r \cdot e^{i\Theta} \ ,$$

$$r = |z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{x^2 + y^2} \ ,$$

$$\Theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{Im\{z\}}{Re\{z\}}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

e

$$i^2 = -1 \ .$$

Definindo-se

$$z^* = (x, -y) = x - y \cdot i = r \cdot (\cos\Theta - i \cdot \sin\Theta) = r \cdot e^{-i\Theta} \ ,$$

tem-se ainda as seguintes identidades:

$$z \cdot z^* = N(z) = |z|^2 = r^2 \ ,$$

$$\frac{z}{z^*} = 1 \cdot e^{i2\Theta} \ ,$$

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \ ,$$

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^* \ ,$$

$$x = Re\{z\} = \frac{z + z^*}{2}$$

e

$$y = Im\{z\} = \frac{z - z^*}{2 \cdot i} \ .$$

3.3 Operações com números complexos

A seguir, são resumidas as operações básicas sobre números complexos: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação, exponencial e logaritmo.

3.3.1 Adição e subtração

Conforme a própria definição dos números complexos, as operações de adição e subtração realizam-se através da adição/subtração de suas partes real e imaginária. Por isso, é preferível que se os represente na forma retangular. Exemplificando, dados

$$z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$$

e

$$z_2 = x_2 + y_2 \cdot i \ ,$$

tem-se que

$$z_a = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i$$

e

$$z_s = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \cdot i \ .$$

3.3.2 Multiplicação e divisão

Para números complexos expressos na forma retangular, a multiplicação é realizada conforme a própria definição dos números complexos. Dados

$$z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$$

e

$$z_2 = x_2 + y_2 \cdot i \ ,$$

a multiplicação é calculada por

$$z_m = z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i \ .$$

Para o cálculo da divisão, é mais prático transformá-la em uma multiplicação, através do complexo conjugado do denominador. Exemplificando, dados

$$z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$$

e

$$z_2 = x_2 + y_2 \cdot i \ ,$$

onde $z_2 \neq 0$, a divisão é realizada da seguinte forma:

$$z_d = \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \cdot \frac{z_2^*}{z_2^*} = z_1 \cdot \frac{z_2^*}{|z_2|^2} \ .$$

No caso dos números expressos na forma polar, os cálculos são extremamente simplificados. Dados

$$z_1 = x_1 + y_1 \cdot i = r_1 \cdot e^{i\Theta_1}$$

e

$$z_2 = x_2 + y_2 \cdot i = r_2 \cdot e^{i\Theta_2} \ ,$$

obtém-se a multiplicação e a divisão, respectivamente, por

$$z_m = z_1 \cdot z_2 = \left(r_1 \cdot e^{i\Theta_1}\right) \cdot \left(r_2 \cdot e^{i\Theta_2}\right) = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i(\Theta_1 + \Theta_2)}$$

e

$$z_d = \left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\left(r_1 \cdot e^{i\Theta_1}\right)}{\left(r_2 \cdot e^{i\Theta_2}\right)} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \cdot e^{i(\Theta_1 - \Theta_2)} \ , \ \text{para } z_2 \neq 0 \ .$$

3.3.3 Potenciação

Assim como nas operações de multiplicação e divisão, é muito mais conveniente realizar a operação de potenciação expressando-se os números complexos na forma polar. Neste caso, o cálculo é realizado do seguinte modo, conhecido como 1ª fórmula de Moivre:

$$\begin{aligned} z^k &= (x + y \cdot i)^k \\ &= \left(r \cdot e^{i\Theta}\right)^k = r^k \cdot e^{ik\Theta} \\ &= r^k \cdot (\cos k\Theta + i \cdot \sin k\Theta) \ . \end{aligned}$$

3.3.4 Radiciação

Na operação de radiciação também é mais conveniente que se utilize a forma polar. Dado o número complexo não nulo

$$z = x + y \cdot i = r \cdot e^{i\Theta} \ ,$$

deseja-se calcular o conjunto de N valores

$$z_k = \sqrt[N]{z} = z^{\frac{1}{N}} = \left(r \cdot e^{i\Theta}\right)^{\frac{1}{N}} = r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\frac{\Theta}{N}} \ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots, (N-1) \ .$$

Tal problema é equivalente a resolver a seguinte equação:

$$z_k^N - \left(r \cdot e^{i\Theta}\right) = 0 \ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots, (N-1) \ , \tag{3.2}$$

que, sendo de ordem N, deve possuir N raízes.

Aplicando-se (3.1) em (3.2), obtém-se a seguinte seqüência infinita de N raízes distintas:

$$\begin{array}{lllllll}
 & & & \vdots & & & \\
z_{-2} & = & \left(r \cdot e^{i(\Theta + (-2)\cdot 2\pi)}\right)^{\frac{1}{N}} & = & r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + (-2)\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} & & \\
z_{-1} & = & \left(r \cdot e^{i(\Theta + (-1)\cdot 2\pi)}\right)^{\frac{1}{N}} & = & r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + (-1)\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} & & \\
z_{0} & = & \left(r \cdot e^{i(\Theta + 0\cdot 2\pi)}\right)^{\frac{1}{N}} & = & r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + 0\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} & & \\
z_{1} & = & \left(r \cdot e^{i(\Theta + 1\cdot 2\pi)}\right)^{\frac{1}{N}} & = & r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + 1\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} & & \\
z_{2} & = & \left(r \cdot e^{i(\Theta + 2\cdot 2\pi)}\right)^{\frac{1}{N}} & = & r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + 2\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} & & \\
 & & & \vdots & & & \\
z_{(N-2)} & = & \left(r \cdot e^{i(\Theta + (N-2)\cdot 2\pi)}\right)^{\frac{1}{N}} & = & r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + (N-2)\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} & = & r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + (-2)\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} = z_{-2} \\
z_{(N-1)} & = & \left(r \cdot e^{i(\Theta + (N-1)\cdot 2\pi)}\right)^{\frac{1}{N}} & = & r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + (N-1)\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} & = & r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + (-1)\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} = z_{-1} \\
z_{(N)} & = & \left(r \cdot e^{i(\Theta + N\cdot 2\pi)}\right)^{\frac{1}{N}} & = & r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + N\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} & = & r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + 0\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} = z_{0} \\
z_{(N+1)} & = & \left(r \cdot e^{i(\Theta + (N+1)\cdot 2\pi)}\right)^{\frac{1}{N}} & = & r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + (N+1)\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} & = & r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + 1\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} = z_{1} \\
z_{(N+2)} & = & \left(r \cdot e^{i(\Theta + (N+2)\cdot 2\pi)}\right)^{\frac{1}{N}} & = & r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + (N+2)\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} & = & r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + 2\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} = z_{2} \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}$$

que pode ser resumida em

$$z_k = \left(r \cdot e^{i(\Theta + k\cdot 2\pi)}\right)^{\frac{1}{N}} = r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + k\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} = r^{\frac{1}{N}} \cdot e^{i\left(\frac{\Theta}{N} + (k \pm m\cdot N)\cdot\frac{2\pi}{N}\right)} = z_{k \pm m\cdot N} \ , \tag{3.3}$$

onde $k = 0, 1, 2, \cdots, (N-1)$ e $m \in \mathbb{N}$.

A Equação (3.3), conhecida como 2ª fórmula de Moivre, mostra que as N raízes distintas de um número complexo não nulo $z = r \cdot e^{i\Theta}$ encontram-se uniformemente distribuídas em um círculo com centro na origem do plano complexo e com raio igual a $r^{\frac{1}{N}}$. O ponto inicial possui ângulo $\Theta_0 = \frac{\Theta}{N}$ rad. Os pontos seguintes são separados por intervalos angulares de $\frac{2\pi}{N}$ rad.

Equações binômias

As equações na forma

$$a_n z^n + a_0 = 0 \ ,$$

onde $a_n, a_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, são denominadas equações binômias.

Equações desse tipo admitem n raízes distintas, calculadas por

$$z_k = \sqrt[n]{-\frac{a_0}{a_n}} \ , \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1) \ .$$

Equações trinômias

As equações na forma

$$a_{2n} z^{2n} + a_n z^n + a_0 = 0 \ ,$$

onde $a_{2n}, a_n, a_0 \in \mathbb{C}$, $a_{2n} \neq 0$, $a_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, são denominadas equações trinômias.

Equações desse tipo admitem $2n$ raízes distintas. Para calculá-las, inicialmente, deve-se fazer $z^n = x$, obtendo-se

$$a_{2n} x^2 + a_n x + a_0 = 0 \ ,$$

que possui raízes x_1 e x_2.

Resolvendo-se as equações binômias $z^n = x_1$ e $z^n = x_2$, determinam-se as $2n$ raízes distintas da equação trinômia.

3.3.5 Exponencial (base e)

Assim como nas operações de adição e subtração, é muito mais conveniente realizar a operação de exponenciação expressando-se os números complexos na forma retangular. Neste caso, o cálculo é realizado do seguinte modo:

$$\begin{aligned} exp(z) &= e^z \\ &= e^{(x+y\cdot i)} \\ &= (e^x) \cdot e^{i(y)} \\ &= (e^x) \cdot (cos(y) + i \cdot sin(y)) \ . \end{aligned}$$

3.3.6 Logaritmo (base e)

É bom ressaltar que encontram-se algumas notações diferentes para logaritmos. Por vezes, o logaritmo natural (base e) é representado por $log(\cdot)$, enquanto o logaritmo comum (base 10) e os logaritmos de outras bases são representados por $log'base'(\cdot)$ ou $log_{'base'}(\cdot)$. Por exemplo: $log10(\cdot)$, $log2(\cdot)$, $log_{10}(\cdot)$ e $log_2(\cdot)$. Alternativamente, o logaritmo natural (base e) é representado por $ln(\cdot)$, o logaritmo comum (base 10) é representado por $log(\cdot)$ e os logaritmos de outras bases são representados por $log'base'(\cdot)$ ou $log_{'base'}(\cdot)$.

Para realizar a operação de logaritmo também é mais conveniente expressar os números complexos na forma polar. O cálculo é realizado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \ln(z) &= \ln\left(x + y \cdot i\right) \\ &= \ln\left(r \cdot e^{i\Theta}\right) \;=\; \ln\left(r \cdot e^{i(\Theta \pm k \cdot 2\pi)}\right) \\ &= \ln(r) + \Theta \cdot i \ , \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \Theta < 2\pi$ é argumento principal.

3.4 Referências

Os tópicos abordados neste capítulo podem ser encontrados, com mais detalhes, em [IMD$^+$85].

3.5 Exercícios propostos

1. Dados os números complexos $z_1 = (a_1 + j\ b_1)$ e $z_2 = (a_2 + j\ b_2)$, atenda aos seguintes itens:

   (a) Calcule os números complexos conjugados z_1^* e z_2^*.
   (b) Calcule $(z_1 + z_2)$.
   (c) Calcule $(z_1 - z_2)$.
   (d) Calcule $(z_1 \cdot z_2)$.
   (e) Calcule $(z_1^* + z_2^*)$.
   (f) Calcule $(z_1^* - z_2^*)$.
   (g) Calcule $(z_1^* \cdot z_2^*)$.
   (h) Calcule $(z_1 + z_2)^*$.
   (i) Calcule $(z_1 - z_2)^*$.
   (j) Calcule $(z_1 \cdot z_2)^*$.
   (k) Mostre que $(z_1 + z_2)^* = (z_1^* + z_2^*)$.
   (l) Mostre que $(z_1 \cdot z_2)^* = (z_1^* \cdot z_2^*)$.
   (m) Mostre que $(z_1 \cdot z_2) = (z_2 \cdot z_1)$.

2. Dados os vetores complexos $\boldsymbol{z} = [\ z_1\ z_2\ ]^T$, $\boldsymbol{z_a} = [\ z_{1_a}\ z_{2_a}\ ]^T$ e $\boldsymbol{z_b} = [\ z_{1_b}\ z_{2_b}\ ]^T$, bem como a relação $\boldsymbol{z}^H = (\boldsymbol{z}^*)^T$ atenda aos seguintes itens:

   (a) Mostre que $(\boldsymbol{z}^*)^T = (\boldsymbol{z}^T)^*$.
   (b) Calcule $\boldsymbol{z}^H$, $\boldsymbol{z_a}^H$ e $\boldsymbol{z_b}^H$.
   (c) Calcule $(\boldsymbol{z_a}^H \cdot \boldsymbol{z_b})$.
   (d) Calcule $(\boldsymbol{z_b}^H \cdot \boldsymbol{z_a})^*$.
   (e) Mostre que $(\boldsymbol{z_a}^H \cdot \boldsymbol{z_b}) = (\boldsymbol{z_b}^H \cdot \boldsymbol{z_a})^*$.

3. Calcule os números complexos $z_k = j^k$, para $j = (0, 1)$ e $k = \{0, 1, 2, 3\}$, empregando as seguintes representações:

   (a) Par ordenado.
   (b) Forma algébrica (ou retangular).
   (c) Forma trigonométrica (ou polar).

4. Estabeleça uma relação geométrica entre os números complexos $z_k = j^k$, para $j = (0, 1)$ e $k = \{0, 1, 2, 3\}$, com base na sua representação na forma polar e nas operações de multiplicação e/ou de potenciação.

5. Dados $\boldsymbol{r} = \{r_1, r_2, r_3\} = \{0.5, 1, 2\}$ e $\Theta_N = \frac{2\pi}{N}$, onde $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12\}$, esboce o gráfico, no plano complexo, dos números complexos $z_{kN} = r_k \cdot e^{j\Theta_N}$.

6. Esboce o gráfico, no plano complexo, do lugar geométrico definido por $|z| = 1$.

7. Calcule as N raízes complexas do número: (a) $z = 1$ e (b) $z = -1$.

8. Dado $N = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, esboce os gráficos, no plano complexo, das N raízes complexas do número: (a) $z = 1$ e (b) $z = -1$.

Capítulo 4

Revisão de polinômios

4.1 Definições

Dada a seqüência $\boldsymbol{a} = \{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{N-1}, a_N\}$, onde $a_k \in \mathbb{C}$, a função $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$, é denominada função polinomial ou polinômio associado à seqüência $\boldsymbol{a}$.

Os números a_k são denominados coeficientes e as parcelas $a_k x^k$ são chamadas de termos, do polinômio f.

De uma forma geral, sem levar em conta as diferentes definições existentes, um polinômio com um único termo $a_k x^k$ é dito um monômio.

Dado o polinômio f, o seu grau, denotado por ∂f ou $gr\ f$, é definido por

$$\partial f = p, \text{ onde } \begin{cases} a_p \neq 0 \\ a_i = 0, \forall i > p \end{cases} .$$

O termo de mais alto grau ($a_N x^N$) é denominado de termo dominante (ou líder). Por sua vez, o coeficiente do termo dominante (a_N) é definido como o coeficiente dominante (ou líder).

Se o valor do coeficiente dominante de um polinômio for igual a 1, o polinômio é chamado de polinômio mônico (ou unitário).

Se houver um ou mais coeficientes nulos, o polinômio é dito incompleto.

Dados $r \in \mathbb{C}$ e um polinômio f, se $f(r) = 0$, então r é dito uma raiz (ou um zero) de f.

Uma vez que expressões algébricas são definidas como expressões matemáticas que apresentam números, letras e operações, pode-se dizer que um polinômio é uma expressão algébrica.

4.2 Interpretações

A função polinomial f pode ser interpretada de duas formas diferentes.

Por um lado, f pode ser pensada como um único elemento, individual, de um conjunto de funções polinomiais.

De outra forma, f pode ser interpretada como uma equação a ser avaliada, que retorna o valor numérico $v = f(x)$, o qual é a imagem de x pela função f.

4.3 Operações básicas

4.3.1 Igualdade

Dados os polinômios $f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ e $g(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k x^k$, eles são considerados iguais se e somente se $a_k = b_k$.

4.3.2 Adição e subtração

Dados os polinômios $f(x) = \sum_{k=0}^{M} a_k x^k$ e $g(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k x^k$, a sua adição (ou subtração) é definida por

$$(f \pm g)(x) = \sum_{k=0}^{max(M,N)} (a_k \pm b_k) x^k \ .$$

Dados os polinômios f e g, tem-se

$$\partial(f+g) \leq max(\partial f, \partial g) \ .$$

4.3.3 Multiplicação

Dados os polinômios $f(x) = \sum_{k=0}^{M} a_k x^k$ e $g(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k x^k$, a sua multiplicação é definida por

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \cdots + (a_M b_N) x^{M+N} \\ &= \sum_{k=0}^{(M+N)} c_k x^k \ ,\end{aligned}$$

onde

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_k + \cdots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{(k-i)} \ .$$

Dados os polinômios f e g, tem-se

$$\partial(fg) = (\partial f + \partial g) \ .$$

4.3.4 Divisão

Definições

Dados os polinômios f e g, dividir f por g ($f \div g$) significa encontrar outros dois polinômios, q e r, de modo que as seguintes relações sejam satisfeitas:

$$\begin{cases} (q \cdot g) + r = f \\ \\ \partial r < \partial g \text{ ou } \partial r = 0 \text{ (divisão exata)} \end{cases} .$$

Os polinômios são denominados dividendo f, divisor g, quociente q e resto r.

Teorema do resto

Dados os polinômios f e g, tal que $g(x) = (x - a_0)$ e $\partial f \geq 1$, então, na divisão $f \div g$, tem-se que $\partial r < \partial g = 1$. Logo, $\partial r = 0$ e $r = f(a_0)$.

Teorema de D'Alembert

Um polinômio f é divisível (divisão exata) pelo polinômio $g(x) = (x - a_0)$ se, e somente se, $r = 0$. Portanto, a_0 deve ser raiz de f, de forma que $r = f(a_0) = 0$.

Teorema da decomposição

Dado o polinômio

$$f(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \ ,$$

ele pode ser decomposto, para $N \geq 1$, em

$$f(x) = a_N (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_N) = a_N \prod_{k=1}^{N} (x - r_k) \ ,$$

onde r_k são as raízes (distintas e simples) de f.

Como corolário da demonstração, tem-se que toda equação polinomial $f(x) = 0$ admite N, e somente N, raízes complexas.

Pensando no caso da ocorrência de múltiplas raízes com o mesmo valor (raízes múltiplas), com multiplicidade m_k, a decomposição pode ser expressa como

$$f(x) = a_N (x - r_1)^{m_1} (x - r_2)^{m_2} \cdots (x - r_P)^{m_P} = a_N \prod_{k=1}^{P} (x - r_k)^{m_k} \ ,$$

onde

$$(m_1 + m_2 + \cdots + m_P) = N$$

e r_k são as P raízes distintas de f, com multiplicidade m_k.

4.4 Relações úteis

4.4.1 Relações de Bhaskara

Dada a equação polinomial de grau 2

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \ ,$$

onde $a \neq 0$, as suas raízes podem ser encontradas pelas seguintes relações:

$$\Delta = (b^2 - 4ac) \ ,$$

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

e

$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \ .$$

4.4.2 Relações de Girard

Dada a equação polinomial de grau 2

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \ ,$$

onde $a \neq 0$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a(x-r_1)(x-r_2) \\ &= a\left[x^2 - (r_1+r_2)x + (r_1 r_2)\right] \\ &= a\left(x^2 - Sx + P\right) \ , \end{aligned}$$

de onde obtém-se

$$S = (r_1 + r_2) = -\frac{b}{a}$$

e

$$P = (r_1 r_2) = \frac{c}{a} \ .$$

As relações de Girard não são suficientes para que se calcule as raízes r_k de f. Porém, no caso de polinômios (equações) de grau 2, com combinações particulares de S e P, não é difícil inferir os valores de r_1 e r_2.

4.4.3 Coeficientes reais e raízes complexas

Pode-se demonstrar que, em um polinômio f com coeficientes $a_k \in \mathbb{R}$, caso seja encontrada uma raiz $r_1 \in \mathbb{C}$, deverá existir uma outra raiz $r_2 \in \mathbb{C}$, obrigatoriamente com valor igual ao complexo conjugado de r_1.

Dito de outra forma, em um polinômio f com coeficientes reais a_k, raízes complexas não reais ocorrem em pares, com valores complexos conjugados ($r_2 = r_1^*$).

No caso da existência de múltiplas raízes com o mesmo valor (raízes múltiplas), raízes complexas não reais ocorrem em pares, com valores complexos conjugados ($r_2 = r_1^*$), cada uma delas com multiplicidade m.

4.5 Equação polinomial (ou equação algébrica)

Dadas as funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$, a sentença $f(x) = g(x)$ é definida como uma equação polinomial ou equação algébrica. Os valores de x que tornam a sentença verdadeira são denominados de raízes da equação.

As seguintes operações não alteram o conjunto solução (ou as raízes) de uma equação polinomial:

$$f(x) = g(x) \longleftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$$

e

$$f(x) = g(x) \longleftrightarrow k \cdot f(x) = k \cdot g(x) \ .$$

A partir de tais operações, pode-se escrever

$$f(x) = g(x) \longleftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$

ou ainda

$$f(x) = g(x) \longleftrightarrow f(x) - g(x) = p(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \ .$$

Desse modo, encontrar o conjunto solução (ou as raízes) da equação polinomial $f(x) = g(x)$ é equivalente a encontrar as raízes do polinômio $p(x) = f(x) - g(x)$.

4.6 Interpretação geométrica

Pensando no polinômio f como um mapeamento $y = f(x)$, onde $x \in \mathbb{R}$, pode-se representar tal relação por meio de uma curva em um gráfico bidimensional, com abscissa x e ordenada y. Nesse sentido, a cada par (x, y) corresponde um ponto da curva.

As curvas das seguintes funções são bem conhecidas:

- Função constante (monômio de grau 0): $f(x) = a_0$.
- Função linear (monômio de grau 1): $f(x) = a_1 x$.
- Função afim (polinômio de grau 1): $f(x) = a_1 x + a_0$.
- Função quadrática (polinômio de grau 2): $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.
- Função cúbica (polinômio de grau 3): $f(x) = a_2 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Dado o mapeamento $y = f(x)$, pode-se interpretar que as raízes do polinômio f são os valores de x onde ocorrem interseções (ou cruzamentos) da curva $y = f(x)$ com a curva $y = 0$ (ou com o eixo das abscissas).

Dados os mapeamentos $y_1 = f(x)$ e $y_2 = g(x)$, pode-se interpretar que o conjunto solução (ou as raízes) da equação polinomial $f(x) = g(x)$ são os valores de x onde ocorrem interseções (ou cruzamentos) entre as curvas y_1 e y_2. Pensando ainda que a equação polinomial $f(x) = g(x)$ pode ser reescrita por meio do mapeamento $y_3 = p(x) = f(x) - g(x) = 0$, pode-se interpretar que o conjunto solução (ou as raízes) da equação polinomial são os valores de x onde ocorrem interseções (ou cruzamentos) da curva $y_3 = p(x)$ com a curva $y_3 = 0$ (ou com o eixo das abscissas).

4.7 Função polinomial racional

4.7.1 Definições

Uma função polinomial racional é simplesmente uma razão de polinômios, da forma

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{L} b_k x^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k x^k} = \frac{b_L x^L + b_{L-1} x^{L-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0} \ ,$$

onde n e d são os polinômios numerador e denominador, respectivamente.

No caso onde $L < N$, a razão é dita uma fração própria. Caso contrário, ela é chamada de fração imprópria.

4.7.2 Raízes, zeros e pólos

As raízes dos polinômios n e d recebem denominações diferentes, em relação ao polinômio f. Dado que as raízes de n anulam f, elas são consideradas os zeros de f. Por sua vez, as raízes de d fazem f tender a infinito, sendo chamadas de pólos de f.

Em uma função polinomial racional f, o total de zeros é igual ao total de pólos, embora a quantidade de zeros finitos possa ser diferente da quantidade de pólos finitos.

Comumente, em representações gráficas, os zeros são representados pelo símbolo "O", enquanto os pólos são representados pelo símbolo "X".

4.7.3 Decomposições básicas

Decomposição série (produto de polinômios de ordem 1)

Conhecendo-se os zeros e os pólos da função polinomial racional f, ela pode ser decomposta da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{n(x)}{d(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{L} b_k x^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k x^k} \\
&= \frac{b_L x^L + b_{L-1} x^{L-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0} \\
&= \frac{b_L (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_L)}{a_N (x - p_1)(x - p_2) \cdots (x - p_N)} \\
&= \left(\frac{b_L}{a_N} \right) \frac{(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_L)}{(x - p_1)(x - p_2) \cdots (x - p_N)} \\
&= K \, \frac{\prod_{k=1}^{L} (x - z_k)}{\prod_{k=1}^{N} (x - p_k)} \ ,
\end{aligned}
$$

onde z_k e p_k são os zeros e os pólos (distintos e simples) de f, bem como $K = (b_L/a_N)$ é definida como a constante de ganho de f.

Pensando no caso da ocorrência de múltiplas raízes com o mesmo valor (raízes múltiplas), com multiplicidade m_k, a decomposição pode ser expressa como

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{b_L}{a_N} \right) \frac{(x - z_1)^{m_{z1}} (x - z_2)^{m_{z2}} \cdots (x - z_P)^{m_{zP}}}{(x - p_1)^{m_{p1}} (x - p_2)^{m_{p2}} \cdots (x - p_Q)^{m_{pQ}}} \\
&= K \, \frac{\prod_{k=1}^{P} (x - z_k)^{m_{zk}}}{\prod_{k=1}^{Q} (x - p_k)^{m_{pk}}} \ ,
\end{aligned}
$$

onde

$$
K = \left(\frac{b_L}{a_N} \right) \ ,
$$

$$
(m_{z1} + m_{z2} + \cdots + m_{zP}) = L \ ,
$$

$$
(m_{p1} + m_{p2} + \cdots + m_{pQ}) = N \ ,
$$

bem como z_k e p_k são os P zeros e os Q pólos distintos de f, com multiplicidade m_{zk} e m_{pk}, respectivamente.

Decomposição paralela (soma de frações parciais)

Aplicando-se a divisão polinomial, uma função polinomial racional imprópria g pode ser decomposta na soma de um polinômio p com uma função polinomial racional própria f, dada por

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{d_M x^M + d_{M-1} x^{M-1} + \cdots + d_2 x^2 + d_1 x + d_0}{a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0} \\ &= p(x) + \frac{b_L x^L + b_{L-1} x^{L-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0} \\ &= p(x) + f(x) \ . \end{aligned}$$

Conhecendo-se os pólos da função polinomial racional própria f, ela pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{n(x)}{d(x)} = \frac{\sum_{k=0}^{L} b_k x^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k x^k} \\ &= \frac{b_L x^L + b_{L-1} x^{L-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0} \\ &= \frac{b_L x^L + b_{L-1} x^{L-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{a_N (x - p_1)(x - p_2) \cdots (x - p_N)} \\ &= \left(\frac{1}{a_N} \right) \frac{b_L x^L + b_{L-1} x^{L-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}{(x - p_1)(x - p_2) \cdots (x - p_N)} \\ &= \left(\frac{1}{a_N} \right) \left[\frac{C_1}{(x - p_1)} + \frac{C_2}{(x - p_2)} + \cdots + \frac{C_N}{(x - p_N)} \right] \\ &= \left(\frac{1}{a_N} \right) \sum_{k=1}^{N} \frac{C_k}{(x - p_k)} \ , \end{aligned}$$

onde p_k são os pólos (distintos e simples) de f.

As parcelas $C_k/(x - p_k)$ são chamadas de frações parciais. As constantes C_k são os resíduos dos pólos p_k. No caso de $p_i = p_j^*$, pode-se mostrar que $C_i = C_j^*$.

4.8 Referências

Os tópicos abordados neste capítulo podem ser encontrados, com mais detalhes, em [IMD+85].

Parte III

Nivelamento sobre programação

Capítulo 5

Relação de um somatório de produtos com uma multiplicação matricial

A operação de somatório de produtos pode ser calculada por meio de uma multiplicação matricial. A seguir, são apresentados alguns casos sobre tal relação.

5.1 Somatório de produtos

Uma operação de somatório de produtos genérica é descrita por

$$y[n] = \sum_{k} h[n,k] \ x[k] \ .$$

Considerando-se faixas limitadas para n e k, e aplicando-se diretamente a definição, ela pode ser calculada por meio de dois laços aninhados (*nested loops*) de computação. Isso é ilustrado na Figura 5.1.

```
for n=[N1;N2]
  y[n] = 0;
  for k=[K1;K2]
    y[n] = y[n] + ( h[n,k] * x[k] );
  endfor
endfor
```

Figura 5.1: Trecho de código computacional genérico, para implementação do somatório de produtos $y[n] = \sum_k h[n,k] \ x[k]$, com faixas limitadas para n e k.

5.2 Caso 1: valores genéricos $h[n,k]$

Dado o somatório de produtos

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n,k] \; x[k]$$

e supondo-se $x[n] = 0$ fora da faixa $0 \le n \le C$ e $h[n,k] = 0$ fora da faixa $0 \le n \le L$, obtém-se $y[n] = 0$ fora da faixa $0 \le n \le L$. Assim, o somatório pode ser expandido da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl}
y[0] & = & h[0,0] \; x[0] + h[0,1] \; x[1] + h[0,2] \; x[2] + \cdots + h[0,C] \; x[C] \\
y[1] & = & h[1,0] \; x[0] + h[1,1] \; x[1] + h[1,2] \; x[2] + \cdots + h[1,C] \; x[C] \\
y[2] & = & h[2,0] \; x[0] + h[2,1] \; x[1] + h[2,2] \; x[2] + \cdots + h[2,C] \; x[C] \\
 & \vdots & \\
y[L] & = & h[L,0] \; x[0] + h[L,1] \; x[1] + h[L,2] \; x[2] + \cdots + h[L,C] \; x[C]
\end{array}$$

o que pode ser reescrito como

$$\begin{array}{rcl}
y[0] & = & \left[\; h[0,0] \; h[0,1] \; h[0,2] \cdots \; h[0,C] \; \right] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[C] \end{bmatrix} \\
y[1] & = & \left[\; h[1,0] \; h[1,1] \; h[1,2] \cdots \; h[1,C] \; \right] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[C] \end{bmatrix} \\
y[2] & = & \left[\; h[2,0] \; h[2,1] \; h[2,2] \cdots \; h[2,C] \; \right] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[C] \end{bmatrix} \\
 & \vdots & \\
y[L] & = & \left[\; h[L,0] \; h[L,1] \; h[L,2] \cdots \; h[L,C] \; \right] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[C] \end{bmatrix}
\end{array}$$

e resumido como

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[L] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0,0] & h[0,1] & h[0,2] & \cdots & h[0,C] \\ h[1,0] & h[1,1] & h[1,2] & \cdots & h[1,C] \\ h[2,0] & h[2,1] & h[2,2] & \cdots & h[2,C] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[L,0] & h[L,1] & h[L,2] & \cdots & h[L,C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[C] \end{bmatrix}$$

e, finalmente, simbolizado por

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{X} \ ,$$

onde

$$\boldsymbol{Y} = [\ y[0] \ y[1] \ y[2] \ \cdots \ y[L] \ ]^T \ ,$$

$$\boldsymbol{X} = [\ x[0] \ x[1] \ x[2] \ \cdots \ x[C] \ ]^T$$

e

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} h[0,0] & h[0,1] & h[0,2] & \cdots & h[0,C] \\ h[1,0] & h[1,1] & h[1,2] & \cdots & h[1,C] \\ h[2,0] & h[2,1] & h[2,2] & \cdots & h[2,C] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[L,0] & h[L,1] & h[L,2] & \cdots & h[L,C] \end{bmatrix} .$$

Exemplo:

Supondo-se $C = 4$ e $L = 3$, o somatório de produtos pode ser calculado por

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0,0] & h[0,1] & h[0,2] & h[0,3] & h[0,4] \\ h[1,0] & h[1,1] & h[1,2] & h[1,3] & h[1,4] \\ h[2,0] & h[2,1] & h[2,2] & h[2,3] & h[2,4] \\ h[3,0] & h[3,1] & h[3,2] & h[3,3] & h[3,4] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ x[4] \end{bmatrix}$$

5.3 Caso 2: valores $h[n,k] = h[-k+n]$

Dado o somatório de produtos

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n,k] \ x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[-k+n] \ x[k]$$

e supondo-se $x[n] = 0$ fora da faixa $0 \leq n \leq C$ e $h[n] = 0$ fora da faixa $0 \leq n \leq L$, ele pode ser reescrito como

$$y[n] = \sum_{k=0}^{C} h[-k+n] \ x[k]$$

ou ainda, fazendo-se $m = (-k+n)$, como

$$y[n] = \sum_{m=n}^{-C+n} h[m] \ x[-m+n] \ ,$$

o que indica que obtém-se $y[n] = 0$ fora da faixa $0 \leq n \leq (L+C)$. Assim, o somatório pode ser expandido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y[0] &= h[0,0] \ x[0] + h[0,1] \ x[1] + h[0,2] \ x[2] + \cdots + h[0,C] \ x[C] \\ y[1] &= h[1,0] \ x[0] + h[1,1] \ x[1] + h[1,2] \ x[2] + \cdots + h[1,C] \ x[C] \\ y[2] &= h[2,0] \ x[0] + h[2,1] \ x[1] + h[2,2] \ x[2] + \cdots + h[2,C] \ x[C] \\ &\vdots \\ y[L+C] &= h[L+C,0] \ x[0] + h[L+C,1] \ x[1] + h[L+C,2] \ x[2] + \cdots + h[L+C,C] \ x[C] \end{aligned}$$

que, para $h[n, k] = h[-k + n]$, é equivalente a

$$\begin{aligned}
y[0] &= h[0]\ x[0] + h[-1]\ x[1] + h[-2]\ x[2] + \cdots + h[-C]\ x[C] \\
y[1] &= h[1]\ x[0] + h[0]\ x[1] + h[-1]\ x[2] + \cdots + h[1-C]\ x[C] \\
y[2] &= h[2]\ x[0] + h[1]\ x[1] + h[0]\ x[2] + \cdots + h[2-C]\ x[C] \\
&\vdots \\
y[L+C] &= h[L+C]\ x[0] + h[L+C-1]\ x[1] + h[L+C-2]\ x[2] + \cdots + h[L]\ x[C]
\end{aligned}$$

o que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
y[0] &= \left[\ h[0]\ h[-1]\ h[-2] \cdots\ h[-C]\ \right] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[C] \end{bmatrix} \\
y[1] &= \left[\ h[1]\ h[0]\ h[-1] \cdots\ h[1-C]\ \right] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[C] \end{bmatrix} \\
y[2] &= \left[\ h[2]\ h[1]\ h[0] \cdots\ h[2-C]\ \right] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[C] \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
y[L+C] &= \left[\ h[L+C]\ h[L+C-1]\ h[L+C-2] \cdots\ h[L]\ \right] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[C] \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e resumido como

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[L+C] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & h[-1] & h[-2] & \cdots & h[-C] \\ h[1] & h[0] & h[-1] & \cdots & h[1-C] \\ h[2] & h[1] & h[0] & \cdots & h[2-C] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[L+C] & h[L+C-1] & h[L+C-2] & \cdots & h[L] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[C] \end{bmatrix}$$

e, finalmente, simbolizado por

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{X} \ ,$$

onde

$$\boldsymbol{Y} = [\ y[0]\ y[1]\ y[2]\ \cdots\ y[L+C]\ ]^T \ ,$$

$$\boldsymbol{X} = [\ x[0]\ x[1]\ x[2]\ \cdots\ x[C]\ ]^T$$

e

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} h[0] & h[-1] & h[-2] & \cdots & h[-C] \\ h[1] & h[0] & h[-1] & \cdots & h[1-C] \\ h[2] & h[1] & h[0] & \cdots & h[2-C] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[L+C] & h[L+C-1] & h[L+C-2] & \cdots & h[L] \end{bmatrix} .$$

Exemplo:

Supondo-se $C = 4$ e $L = 3$, o somatório de produtos pode ser calculado por

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \\ y[5] \\ y[6] \\ y[7] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & \mathbf{h[\text{-}1]} & \mathbf{h[\text{-}2]} & \mathbf{h[\text{-}3]} & \mathbf{h[\text{-}4]} \\ h[1] & h[0] & \mathbf{h[\text{-}1]} & \mathbf{h[\text{-}2]} & \mathbf{h[\text{-}3]} \\ h[2] & h[1] & h[0] & \mathbf{h[\text{-}1]} & \mathbf{h[\text{-}2]} \\ h[3] & h[2] & h[1] & h[0] & \mathbf{h[\text{-}1]} \\ \mathbf{h[4]} & h[3] & h[2] & h[1] & h[0] \\ \mathbf{h[5]} & \mathbf{h[4]} & h[3] & h[2] & h[1] \\ \mathbf{h[6]} & \mathbf{h[5]} & \mathbf{h[4]} & h[3] & h[2] \\ \mathbf{h[7]} & \mathbf{h[6]} & \mathbf{h[5]} & \mathbf{h[4]} & h[3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ x[4] \end{bmatrix} ,$$

onde, nesse caso, os valores de $h[n]$ em negrito são nulos.

5.4 Caso 3: valores $h[n,k] = W^{kn}$

Dado o somatório de produtos

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n,k]\ x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W^{kn}\ x[k]$$

e supondo-se $x[n] = 0$ fora da faixa $0 \leq n \leq N$ e $y[n] = 0$ fora da faixa $0 \leq n \leq N$, ele pode ser expandido da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} y[0] & = & h[0,0]\ x[0] + h[0,1]\ x[1] + h[0,2]\ x[2] + \cdots + h[0,N]\ x[N] \\ y[1] & = & h[1,0]\ x[0] + h[1,1]\ x[1] + h[1,2]\ x[2] + \cdots + h[1,N]\ x[N] \\ y[2] & = & h[2,0]\ x[0] + h[2,1]\ x[1] + h[2,2]\ x[2] + \cdots + h[2,N]\ x[N] \\ & \vdots & \\ y[N] & = & h[N,0]\ x[0] + h[N,1]\ x[1] + h[N,2]\ x[2] + \cdots + h[N,N]\ x[N] \end{array}$$

que, para $h[n,k] = W^{kn}$, é equivalente a

$$\begin{array}{rcl} y[0] & = & W^0\ x[0] + W^0\ x[1] + W^0\ x[2] + \cdots + W^0\ x[N] \\ y[1] & = & W^0\ x[0] + W^1\ x[1] + W^2\ x[2] + \cdots + W^N\ x[N] \\ y[2] & = & W^0\ x[0] + W^2\ x[1] + W^4\ x[2] + \cdots + W^{2N}\ x[N] \\ & \vdots & \\ y[N] & = & W^0\ x[0] + W^N\ x[1] + W^{2N}\ x[2] + \cdots + W^{N^2}\ x[N] \end{array}$$

o que pode ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
y[0] &= \left[\, W^0 \; W^0 \; W^0 \cdots \; W^0 \,\right] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix} \\
y[1] &= \left[\, W^0 \; W^1 \; W^2 \cdots \; W^N \,\right] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix} \\
y[2] &= \left[\, W^0 \; W^2 \; W^4 \cdots \; W^{2N} \,\right] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
y[N] &= \left[\, W^0 \; W^N \; W^{2N} \cdots \; W^{N^2} \,\right] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

e resumido como

$$
\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \cdots & W^N \\ W^0 & W^2 & W^4 & \cdots & W^{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W^0 & W^N & W^{2N} & \cdots & W^{N^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix}
$$

e, finalmente, simbolizado por

$$
\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{X} \ ,
$$

onde

$$
\boldsymbol{Y} = [\ y[0] \ y[1] \ y[2] \ \cdots \ y[N]\ ]^T \ ,
$$

$$
\boldsymbol{X} = [\ x[0] \ x[1] \ x[2] \ \cdots \ x[N]\ ]^T
$$

e

$$
\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \cdots & W^N \\ W^0 & W^2 & W^4 & \cdots & W^{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W^0 & W^N & W^{2N} & \cdots & W^{N^2} \end{bmatrix} \ .
$$

Exemplo:

Supondo-se $N = 4$, o somatório de produtos pode ser calculado por

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ y[2] \\ y[3] \\ y[4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} \\ W^0 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ x[4] \end{bmatrix} ,$$

onde deve ser notado que $W^0 = 1$.

Capítulo 6

Tópicos sobre divisão entre números inteiros

6.1 Algoritmo de divisão entre números inteiros

Teorema (Divisão com resto): Para cada inteiro c (dividendo) e cada inteiro positivo d (divisor), existe um único par de inteiros Q (quociente) e r (resto), tal que $c = Q \cdot d + r$, onde $0 \leq |r| < d$.

6.2 Quociente

O quociente pode ser descrito por

$$Q = \left\lfloor \frac{c}{d} \right\rfloor \ ,$$

onde $\lfloor x \rfloor$ é a função $floor(x)$, que representa o maior inteiro menor que x.

6.3 Resto

Algumas notações comuns para o resto da divisão de c por d são

$$r = R_d[c] = ((c)) \ .$$

6.4 Congruência

Dois números inteiros c_1 e c_2 são ditos congruentes, módulo d, quando d divide exatamente (*exactly divides* ou *evenly divides*) a diferença $(c_1 - c_2)$, o que pode ser descrito por

$$c_1 \equiv c_2 \pmod{d} \ ,$$

$$Q = \frac{(c_1 - c_2)}{d}$$

ou

$$c_1 = Q \cdot d + c_2 \ . \tag{6.1}$$

Quando c_1 e d são inteiros positivos e $0 \leq c_2 < d$, a Equação (6.1) pode ser reescrita como

$$c_1 = Q \cdot d + r \ ,$$

onde o resto r da divisão inteira é denominado (o menor) resíduo de c_1, módulo d.

Por outro lado, o cálculo do (menor) resíduo r de c_1, módulo d, considerando-se que c_1 e d são inteiros quaisquer, é dado por

$$d > 0 \text{ e } c_1 > 0 \rightarrow c_1 = Q \cdot d + r_p \rightarrow r = r_p \ ,$$

$$d > 0 \text{ e } c_1 < 0 \rightarrow -|c_1| = (-|Q|) \cdot d + (-|r_n|) \rightarrow r = d + (-|r_n|) \ ,$$

$$d < 0 \text{ e } c_1 > 0 \rightarrow c_1 = (-|Q|) \cdot (-|d|) + r_p \rightarrow r = (-|d|) + r_p$$

e

$$d < 0 \text{ e } c_1 < 0 \rightarrow -|c_1| = Q \cdot (-|d|) + (-|r_n|) \rightarrow r = -|r_n| \ .$$

6.5 Relações de equivalência

- Quando um par ordenado de elementos (x, y) possui uma propriedade R que os relaciona, pode-se dizer que "x é R-relacionado com y", o que é simbolizado por xRy.

- A relação R é definida como o conjunto de todos os pares ordenados que possuem a propriedade em questão.

- Pode-se assumir que R é uma relação definida sobre um conjunto de elementos, de tal forma que x ou y possam representar qualquer elemento do conjunto.

- Classificação das relações:

  - Reflexividade: se xRx é válida para qualquer x, então R é reflexiva.
  - Simetria: se $yRx \leftrightarrow xRy$, então R é simétrica.
  - Transitividade: se $(xRy \text{ e } yRz) \rightarrow xRz$, então R é transitiva.
  - Equivalência: se R é reflexiva, simétrica e transitiva, então R é uma relação de equivalência.

- Pode-se demonstrar que a congruência é uma relação de equivalência, uma vez que:

  - $c_1 \equiv c_1 \pmod{d}$
  - $c_1 \equiv c_2 \rightarrow c_2 \equiv c_1 \pmod{d}$
  - $c_1 \equiv c_2 \text{ e } c_2 \equiv c_3 \rightarrow c_1 \equiv c_3 \pmod{d}$

6.6 Relações úteis

Teorema: Para um mesmo número inteiro positivo d,

(i) $R_d[a+b] = R_d[R_d[a] + R_d[b]]$

(ii) $R_d[a \cdot b] = R_d[R_d[a] \cdot R_d[b]]$

onde $+$ e $\cdot$ denotam, respectivamente, as operações de adição e multiplicação entre números inteiros.

6.7 Indexação em arranjos matriciais

A seguir, são discutidas algumas relações entre indexação, sistemas de numeração e cálculo modular em arranjos matriciais. Inicialmente, são apresentadas duas formas de indexação em arranjos matriciais. Em seguida, os índices são interpretados segundo diferentes sistemas de numeração. Uma interpretação dos índices segundo o cálculo modular também é apresentada. Finalmente, de acordo com uma forma alternativa de indexação, as relações são redefinidas.

6.7.1 Formas de indexação em arranjos matriciais

Nos arranjos matriciais retangulares $(L \times C)$, os seus elementos podem ser indexados através de uma referência dupla, à linha e à coluna, ou por meio de uma referência simples, a um único número, de tal forma que

$$a_{(lc)} \equiv a_{(n)} \ , \tag{6.2}$$

onde $0 \leq l \leq (L-1)$, $0 \leq c \leq (C-1)$ e $0 \leq n \leq (LC-1)$.

Por exemplo, para uma matriz onde $L = C = 4$, pode-se indexá-la das seguintes formas equivalentes:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{0} & a_{1} & a_{2} & a_{3} \\ a_{4} & a_{5} & a_{6} & a_{7} \\ a_{8} & a_{9} & a_{10} & a_{11} \\ a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} . \tag{6.3}$$

6.7.2 Relação entre indexação e sistema de numeração

Observando-se as Equações (6.2) e (6.3), ambos os tipos de indexação podem ser interpretados como um arranjo estruturado de números naturais representados por dois diferentes Sistemas de Numeração Posicional Convencional (SNPC), um com base $b = C$ e outro com base $b = 10$. Assim, a Equação (6.2) pode ser reescrita como

$$a_{(lc)_C} \equiv a_{(n)_{10}} \ . \tag{6.4}$$

No exemplo onde $L = C = 4$, tem-se que

$$a_{(lc)_4} \equiv a_{(n)_{10}} \ . \tag{6.5}$$

Portanto, obter n a partir da tripla (C, l, c), assim como obter a dupla (l, c) a partir da dupla (C, n), pode ser interpretado como um problema de conversão entre bases em um SNPC.

6.7.3 Relação entre indexação e cálculo modular

Utilizando-se o cálculo modular, o valor de n é dado por

$$\begin{aligned} n &= (\text{Número de módulos completos} \cdot \text{quantidade por módulo}) + \\ & \quad (\text{Deslocamento dentro do módulo final}) \end{aligned}$$

e pode-se dizer que

$$n \equiv c \pmod{C} \ .$$

Baseado nessa interpretação, dada a tripla (C, l, c), pode-se calcular n por meio de

$$n = (l \cdot C) + c \ . \tag{6.6}$$

A Equação (6.6) pode ser interpretada como a divisão entre números inteiros, definida por

$$D = (q \cdot d) + r \qquad \longleftrightarrow \qquad \frac{D}{d} = q + \frac{r}{d} \ , \tag{6.7}$$

onde $n = D$ (dividendo), $l = q$ (quociente), $C = d$ (divisor) e $c = r$ (resto). Dessa forma, dada a dupla (C, n), os valores da dupla (l, c) podem ser calculados por

$$\begin{cases} c &= \ rem\left(\frac{n}{C}\right) \\ l &= \ \frac{(n-c)}{C} \end{cases} \tag{6.8}$$

ou

$$\begin{cases} l &= \ int\left(\frac{n}{C}\right) \\ c &= \ n - (l \cdot C) \end{cases} \ , \tag{6.9}$$

onde $rem\,(\cdot)$ e $int\,(\cdot)$ representam, respectivamente, o resto e a parte inteira da divisão inteira em $(\cdot)$.

6.7.4 Formas alternativas de indexação em arranjos matriciais

Em uma forma alternativa, onde $1 \le l' \le L$, $1 \le c' \le C$ e $1 \le n' \le LC$, as Equações (6.2) e (6.3) podem ser respectivamente reescritas como

$$a_{(l'c')} \equiv a_{(n')} \tag{6.10}$$

e

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{1} & a_{2} & a_{3} & a_{4} \\ a_{5} & a_{6} & a_{7} & a_{8} \\ a_{9} & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{bmatrix} \ . \tag{6.11}$$

Nesse caso, dados l' e c', pode-se obter

$$\begin{cases} l &= \ l' - 1 \\ c &= \ c' - 1 \end{cases} \ , \tag{6.12}$$

pode-se calcular n e, finalmente, pode-se chegar em

$$n' = n + 1 \ . \tag{6.13}$$

Por outro lado, dado n', pode-se obter

$$n = n' - 1 \ , \tag{6.14}$$

pode-se calcular a dupla (l, c) e, finalmente, pode-se chegar em

$$\left\{ \begin{array}{lcl} l' & = & l + 1 \\ \\ c' & = & c + 1 \end{array} \right. \ . \tag{6.15}$$

Referências bibliográficas

[Ant86] A. Antoniou. *Digital Filters: Analysis and Design.* Tata McGraw-Hill, New Delhi, India, 2nd reprint edition, 1986.

[Cad73] J. A. Cadzow. *Discrete-Time Systems: An Introduction with Interdisciplinary Applications.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

[DdSN10] P. S. R. Diniz, E. A. B. da Silva, and S. Lima Netto. *Digital Signal Processing: System Analysis and Design.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition, 2010.

[IMD+85] G. Iezzi, C. Murakami, O. Dolce, S. Hazzan, J. N. Pompeu, and N. Machado. *Fundamentos da Matemática Elementar (vol. 1 – 10).* Atual Editora, São Paulo, SP, 1985.

[Jac96] L. B. Jackson. *Digital Filters and Signal Processing - with MATLAB exercises.* Kluwer Academic Publishers, 3rd edition, 1996.

[KD04] H. Kopka and P. W. Daly. *A Guide to LaTeX and Electronic Publishing.* Addison-Wesley, Harlow, England, 4th edition, 2004.

[MG04] F. Mittelbach and M. Goosens. *The LaTeX Companion.* Addison-Wesley, Boston, MA, USA, 2th edition, 2004.

[Mit98] S. K. Mitra. *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach.* McGraw-Hill, New York, NY, 1998.

[OS75] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer. *Digital Signal Processing.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.

[OWY83] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and I. T. Young. *Signals and Systems.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.

[PL76] A. Peled and B. Liu. *Digital Signal Processing: Theory, Design and Implementation.* John Wiley, New York, NY, 1976.

[PM06] J. G. Proakis and D. G. Manolakis. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications.* Prentice Hall, 4th edition, 2006.

[Rob09] M. J. Roberts. *Fundamentos em Sinais e Sistemas.* McGraw-Hill, São Paulo, SP, 2009.

[SDD84] W. D. Stanley, G. R. Dougherty, and R. Dougherty. *Signals and Systems.* Prentice-Hall, Reston, Virginia, 2nd edition, 1984.

[She95] K. Shenoi. *Digital Signal Processing in Telecommunications.* Prentice-Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 1995.

[SK89] R. D. Strum and D. E. Kirk. *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing.* Addison-Wesley, Massachusetts, 1989.