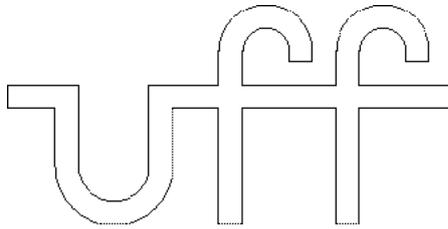


Tutorial
sobre
Influência dos zeros e dos pólos
da Função de Transferência
no formato da função
Resposta em Frequência
para
Fundamentos de
Processamento Digital de Sinais

(Versão A2025M03D17)



Universidade Federal Fluminense

Alexandre Santos de la Vega

Departamento de Engenharia de Telecomunicações – TET

Escola de Engenharia – TCE

Universidade Federal Fluminense – UFF

Março – 2025

621.3192	de la Vega, Alexandre Santos
(*)	
D278	Tutorial sobre Influência dos zeros e dos pólos da Função de Transferência no formato da função Resposta em Frequência para Fundamentos de Processamento Digital de Sinais / Alexandre Santos de la Vega. – Niterói: UFF/TCE/TET, 2025.
(*)	
2025	48 (sem romanos) ou 68 (com romanos) p. (*)
	Tutorial – Graduação, Engenharia de Telecomunicações, UFF/TCE/TET, 2025.
	1. Processamento de Sinais. 2. Processamento Digital de Sinais. 3. Telecomunicações. I. Título.

(*) OBTENHA INFORMAÇÕES NA BIBLIOTECA, ATUALIZE E PEÇA UM NOVO REGISTRO !!!

Aos meus alunos.

Prefácio

O trabalho em questão aborda os tópicos a serem apresentados na disciplina Fundamentos de Processamento Digital de Sinais. O material completo, dividido em apostilas e tutoriais, encontra-se dividido nos seguintes volumes:

1. O conteúdo teórico pode ser encontrado no volume intitulado Apostila de Teoria para Fundamentos de Processamento Digital de Sinais.
2. O conteúdo prático pode ser encontrado no volume intitulado Apostila de Códigos de Programas Demonstrativos para Fundamentos de Processamento Digital de Sinais.
3. As especificações dos trabalhos extra classe propostos na disciplina podem ser encontradas no volume intitulado Apostila de Trabalhos Extra Classe de Exercício e de Código (TEC) para Fundamentos de Processamento Digital de Sinais.
4. Conteúdos matemáticos básicos, necessários à disciplina em questão, são abordados no volume intitulado Apostila de Nivelamento para Fundamentos de Processamento Digital de Sinais.
5. Uma abordagem integradora dos tópicos de interesse da disciplina, de forma simples e direta, utilizando o sistema de média móvel como exemplo, pode ser encontrado no volume intitulado Tutorial sobre Sistema de Média Móvel para Fundamentos de Processamento Digital de Sinais.
6. Um conteúdo associado com Teoria de Sistemas, Teoria de Controle, Teoria de Circuitos e Teoria de Processamento de Sinais, envolvendo aspectos teóricos e códigos de programas demonstrativos, pode ser encontrado no volume intitulado Tutorial sobre Influência dos zeros e dos pólos da Função de Transferência no formato da função Resposta em Frequência para Fundamentos de Processamento Digital de Sinais.

Os documentos foram escritos com o intuito de servir como uma referência rápida para os alunos dos cursos de graduação e de mestrado em Engenharia de Telecomunicações da Universidade Federal Fluminense (UFF). O material básico utilizado para o conteúdo teórico foram as minhas notas de aula, que, por sua vez, originaram-se em uma coletânea de livros sobre os assuntos abordados. Por outro lado, os códigos de programas demonstrativos e as especificações dos trabalhos propostos são completamente autorais.

A motivação inicial para o desenvolvimento desse trabalho foi a de aumentar o dinamismo das aulas. Logo, deve ficar bem claro que os documentos produzidos não pretendem substituir os livros textos ou outros livros de referência. Pelo contrário, espera-se que eles sejam utilizados como ponto de partida para estudos mais aprofundados, utilizando-se a literatura existente.

Espero conseguir manter o presente texto em constante atualização e ampliação.

Correções e sugestões são sempre bem-vindas.

Alexandre Santos de la Vega
UFF / TCE / TET

Agradecimentos

Àqueles professores do Departamento de Engenharia de Telecomunicações (TET), da Escola de Engenharia (TCE), da Universidade Federal Fluminense (UFF), que colaboraram com críticas e sugestões bastante úteis à finalização da versão inicial deste trabalho.

Aos ex-funcionários do TET, Arlei, Carmen Lúcia, Eduardo Wallace, Francisco e Jussara, pelo apoio constante.

Aos meus alunos, que, além de servirem de motivação principal, obrigam-me sempre a me tentar melhorar, em todos os sentidos.

Mais uma vez, e sempre, aos meus pais, por tudo.

Alexandre Santos de la Vega
UFF / TCE / TET

Apresentação do material didático

Metodologia de construção

- O material aqui apresentado não é fruto de um projeto educacional envolvendo idealização, planejamento, pesquisa, estudo, estruturação, desenvolvimento, revisão e edição.
- Pelo contrário, ele nasceu, evoluiu e tem sido mantido de uma forma bem orgânica.

Histórico

- Em 1995, o autor ingressou no Departamento de Engenharia de Telecomunicações (TET) da Universidade Federal Fluminense (UFF) e, desde então, tem sido responsável por diversas disciplinas oferecidas pelo TET para o Curso de Engenharia de Telecomunicações, da Escola de Engenharia da UFF (TCE/UFF), e para o Curso de Ciência da Computação, do Instituto de Computação da UFF (IC/UFF).
- Na época do seu ingresso, o Processamento Digital de Sinais já era um assunto presente na área de Telecomunicações. E com importância crescente. Apesar disso, ainda não era oferecida pelo TET uma disciplina formal sobre a matemática que o fundamenta.
- Com essa percepção, ele criou a disciplina optativa “Introdução ao Processamento Digital de Sinais”, em 1998.
- Para dar suporte às aulas, foram elaboradas as primeiras notas de aula (manuscritas) para a disciplina optativa criada no TET. Nessa primeira tentativa de implantação da disciplina, foi usada a referência [Mit98] como livro texto.
- A disciplina optativa foi oferecida pelo autor apenas durante dois períodos letivos, em virtude do seu afastamento para finalização do seu doutoramento.
- Durante o afastamento, e mesmo algum tempo depois, a disciplina optativa foi oferecida por outro professor do TET. Nesse período, o autor lançou uma outra disciplina optativa, vinculada à primeira, tratando do Projeto de Filtros Digitais.
- Tendo voltado a ministrar a disciplina, o autor decidiu ampliar as notas de aula manuscritas, baseando-se em diversos outros livros.
- Na primeira década de 2000, o TET realizou uma reforma curricular e a disciplina optativa “Introdução ao Processamento Digital de Sinais” tornou-se obrigatória, sob o nome de “Processamento Digital de Sinais”.

- Em 2008, com os objetivos iniciais de melhor organizar os manuscritos e de atender aos apelos dos alunos por cópia dos manuscritos, eles foram apenas transcritos para o Sistema de Preparação de Documentos L^AT_EX [KD04] , [MG04]. Assim, surgiu a primeira versão da apostila de teoria.
- A partir daí, com a maturação gradual que a disciplina foi ganhando a cada período letivo, novos conteúdos foram surgindo. Ora por curiosidade do autor, procurando incorporar um determinado tópico na disciplina. Ora por curiosidade dos alunos, por demandarem algum assunto em especial. Ora por necessidade pedagógica, pois, ao se perceberem dúvidas recorrentes dos alunos, novas formas de abordagem têm sido testadas.
- Além disso, como filosofia educacional do autor, as questões que fazem parte de toda e qualquer forma de avaliação formal da disciplina (testes, provas, trabalhos) são anexadas ao conteúdo, na forma de exercícios propostos.
- No final da década de 2010, o TET realizou uma nova reforma curricular, a qual acarretou uma redução na quantidade e na carga horária das disciplinas. Isso provocou uma reformulação na abordagem dos tópicos da disciplina, que passou a ser denominada de “Fundamentos de Processamento Digital de Sinais”.
- Ainda como filosofia educacional do autor, a apostila de teoria não apresenta figuras que ilustrem os assuntos abordados. Pelo contrário, é demandado aos alunos que eles gerem as suas próprias figuras, a partir de um aplicativo computacional adequado.
- Desde 2011, objetivando incentivar os alunos a modificarem códigos existentes e a gerarem seus próprios códigos, uma nova apostila tem sido elaborada, contendo códigos para programas demonstrativos, relativos aos tópicos abordados na apostila de teoria, em sala de aula e/ou em alguma forma de avaliação formal da disciplina.
- A partir de 2016, com a incorporação de trabalhos semanais na prática da disciplina, uma nova apostila tem sido elaborada, contendo os trabalhos extra classe (TEC) propostos a cada período letivo.
- Em 2018, foi percebido que, utilizando o sistema de média móvel como exemplo, é possível abordar e integrar os tópicos de interesse da disciplina de forma simples e direta. Além disso, com ele, também é possível gerar exemplos, exercícios e aplicações práticas, com certa facilidade. Assim, teve início a elaboração do tutorial sobre o sistema de média móvel.
- Em 2019, foi iniciado um tutorial sobre a influência dos zeros e dos pólos da Função de Transferência no formato da função Resposta em Frequência, buscando atender a uma série de motivações, listadas no documento em questão.
- A partir do isolamento social, imposto pela Pandemia de COVID-19, nos anos de 2020 e 2021, foi notada uma deficiência relativa aos conteúdos matemáticos básicos de Matrizes, Números complexos e Polinômios, necessários à disciplina em questão.
- A princípio, tais conteúdos foram apenas abordados em aulas iniciais de revisão. Em seguida, um texto inicial foi anexado à apostila de teoria, na forma de apêndices. Por fim, a partir de 2025, uma apostila de nivelamento, foi incorporada ao conjunto dos materiais autorais produzidos.

Comentários gerais:

- Conforme foi exposto acima, desde o início da sua confecção até o presente momento, sempre foram preparadas diversas versões de cada documento ao longo de um mesmo período letivo. Por essa razão, o identificador “Versão A<ano>M<mês>D<dia>” aparece logo abaixo do título de cada apostila.
- No tocante à apresentação do conteúdo teórico, os manuscritos originais continham apenas tópicos, destinados à abordagem do conteúdo programático durante as aulas. Pode-se dizer que tais manuscritos representavam apenas um roteiro de aula. Gradativamente, com a evolução da apostila de teoria, os tópicos têm sido trocados por textos dissertativos, relativos ao conteúdo abordado.
- No ponto de vista estrutural é que o aspecto dinâmico dos documentos mais se tem feito presente. Buscando uma melhor apresentação dos tópicos abordados, os diversos seccionamentos de texto (capítulos, seções, subseções, etc.) comumente surgem, são mesclados e desaparecem, a cada nova versão.
- Por tudo isso, pode-se asseguradamente dizer que todo o material produzido encontra-se em constante atualização.
- Na preparação das aulas, têm sido utilizados os seguintes livros:
 - Livros indicados pela ementa da disciplina: [DdSN10], [Mit98].
 - Outros livros indicados: [Rob09], [PM06], [Jac96], [She95], [SK89], [Ant86], [SDD84], [OWY83], [PL76], [OS75], [Cad73].

Teoria abordada no material didático

- Introdução <2 horas>
 - Conceitos básicos: que busca contextualizar a disciplina no âmbito do curso e apresentar conceitos que serão necessários ao longo do texto. <2 horas>
 - Conexão entre os modelos analógico e discreto/digital: que apresenta um resumo das representações dos sinais analógicos no domínio da frequência e aborda as duas formas de conexão entre os domínios analógico e digital. [Opcional]
- Sinais e sistemas (com tempo discreto) no domínio do tempo <12 horas>
 - Sinais no domínio do tempo: definições, classificações, operações, exemplos e caracterizações. <4 horas>
 - Seqüências exponenciais: características relevantes de exponenciais, funções com dependência exponencial, decomposição de funções usando exponenciais, amostragem de sinais contínuos no tempo. <4 horas>
 - Sistemas no domínio do tempo: definições, classificações, operações, exemplos e caracterizações. <4 horas>
- Representações de um Sistema Linear e Invariante ao Tempo (SLIT) <10 horas>
 - Resposta ao impulso. <1 hora>
 - Diagramas de blocos de complexidade genérica. <1 hora>
 - Equação de diferença. <1 hora>
 - Diagramas de sistema (ou estruturas ou realizações). <2 horas>
 - Operador de transferência. <1 hora>
 - Diagrama de pólos e zeros do operador de transferência. <2 horas>
 - Equações de estado. <2 horas>
 - Relações e mapeamentos entre as diversas representações. <distribuído ao longo da apresentação do conteúdo e exercitado na forma de trabalhos>
- Respostas de um Sistema Linear e Invariante ao Tempo (SLIT) <10 horas>
 - Cálculos da resposta de um SLIT <8 horas>
 - * Cálculo da resposta de um SLIT baseado na solução das equações de estado. <1 hora>
 - * Cálculo da resposta de um SLIT baseado no uso do operador de transferência. <1 hora>

- * Cálculo da resposta de um SLIT baseado na solução convencional da equação de diferença. <4 horas>
- * Cálculo da resposta de um SLIT FIR (Resposta ao Impulso Finita) com entrada de comprimento indefinido. <2 horas>
- Tipos de resposta de um SLIT <2 horas>
 - * Resposta completa.
 - * Resposta homogênea + resposta do sistema relaxado (resposta particular + resposta complementar).
 - * Resposta ao estado + resposta à entrada.
 - * Resposta natural + resposta forçada.
 - * Resposta transitória + resposta permanente.
- Noções da representação em domínio transformado para sistemas de primeira ordem [Opcional]
 - Resposta em Frequência: baseado no cálculo da resposta de um SLIT de primeira ordem, para um determinado tipo de sinal de entrada, pode-se identificar um novo tipo de representação para o sistema.
 - Função de Transferência: baseado no cálculo da resposta de um SLIT de primeira ordem, para um determinado tipo de sinal de entrada, pode-se identificar um novo tipo de representação para o sistema.
- Sinais e sistemas (com tempo discreto) no domínio da frequência <20 horas>
 - Sinais <10 horas>
 - * Motivações para a mudança de domínio de uma representação. <1/2 hora>
 - * Revisão das representações em frequência com tempo contínuo (Série de Fourier, Transformada de Fourier e Transformada de Laplace). <1/2 hora>
 - * Série de Fourier de Tempo Discreto (DTFS). <1 hora>
 - * Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT). <2 horas>
 - * Transformada de Fourier Discreta (DFT). <2 horas>
 - * Transformada Z. <2 horas>
 - * Relações entre as diversas representações em frequência, parâmetros e efeitos importantes. <2 horas>
 - Técnicas básicas para aceleração do cálculo da DFT. [Opcional]
 - Aplicações básicas da Transformada Z em sinais e sistemas. <6 horas>
 - * Transformada Z de alguns sinais importantes.
 - * Transformada Z aplicada na convolução.
 - * Transformada Z aplicada em sinais deslocados.
 - * Transformada Z aplicada na equação de diferença.
 - * Transformada Z no cálculo de respostas de um SLIT.

- SLIT de ordem qualquer <4 horas>
 - * Tipos de respostas de um sistema.
 - * Resposta completa em domínio transformado.
 - * Resposta em Freqüência.
 - * Seletividade em Freqüência.
 - * Função de Transferência ou Função de Sistema.
 - * Representações de um SLIT no domínio da freqüência.
- Aplicações: exemplos de aplicações são distribuídos ao longo do texto e exercitados na forma de trabalhos.

Objetivos da disciplina

- Apresentar a base matemática que fundamenta o Processamento Digital de Sinais.
- Trabalhar com sistemas que apresentem as seguintes características:
 - Sistema Linear e Invariante ao Tempo (SLIT).
 - Sistema *Single-Input Single-Output* (SISO).
 - Sistema operando com tempo discreto.
 - Sistema operando com sinais definidos em tempo discreto, quantizados (digitais) ou não (amostrados).
- Trabalhar com sinais básicos que sejam simultaneamente dependentes das variáveis tempo e frequência, utilizando-os na composição dos demais sinais envolvidos.
- Discutir a análise de sistemas no domínio da variável tempo e no domínio da variável frequência. No domínio do tempo, o foco está na FORMA que os sinais apresentam. No domínio da frequência, o foco está na COMPOSIÇÃO que os sinais apresentam.
- Discutir a aplicação dos conceitos de Operador de Transferência (no domínio do tempo) e de Função de Transferência (no domínio da frequência), bem como a relação existente entre ambos.
- Discutir a aplicação do conceito de estado de um sistema e da análise do sistema no espaço de estados.

Sumário

Prefácio	v
Agradecimentos	vii
Apresentação do material didático	ix
Teoria abordada no material didático	xiii
Objetivos da disciplina	xvii
Sumário	xix
I Teoria	1
1 Introdução	3
2 Polinômios	5
2.1 Introdução	5
2.2 Polinômios como elementos de um conjunto	5
2.2.1 Definições	5
2.2.2 Observações relevantes	5
2.3 Polinômios como funções	6
2.3.1 Definições	6
2.3.2 Equação polinomial ou equação algébrica	6
2.3.3 Raízes de uma equação polinomial	6
2.4 Fração ou razão polinomial	7
2.4.1 Função polinomial racional	7
2.4.2 Fração imprópria e fração própria	7
2.4.3 Raízes, zeros e pólos da fração	7
2.4.4 Total de singularidades da fração	7
2.4.5 Fatorações básicas da fração	8
2.4.6 Representações com potências negativas	8
3 Aplicação de polinômios na Teoria de Sistemas	9
3.1 Sistemas do tipo SLIT	9
3.2 Função de Transferência	10
3.3 Função Resposta em Frequência	10

4	Influência da posição dos zeros e dos pólos da $H(z)$	11
4.1	Introdução	11
4.2	Combinação genérica de zeros e pólos	11
4.3	Influência dos zeros	12
4.4	Influência dos pólos	14
5	Aplicação de polinômios em Filtros Digitais	17
5.1	Análise espectral	17
5.2	Filtragem: transformação espectral e conformação	18
5.3	Parâmetros de qualidade na filtragem	19
5.4	Largura da banda de passagem (<i>bandwidth</i>)	20
6	Exemplos de filtros digitais	21
6.1	Introdução	21
6.2	SLIT de primeira ordem	21
6.2.1	Caso 1: $b_0 \neq 0$ e $b_1 = 0$	22
6.2.2	Caso 2: $b_0 = 0$ e $b_1 \neq 0$	22
6.2.3	Caso 3: $b_0 \neq 0$ e $b_1 \neq 0$	23
6.3	SLIT de segunda ordem	24
6.3.1	Caso 1: $b_0 \neq 0$, $b_1 = 0$ e $b_2 = 0$	24
6.3.2	Caso 2: $b_0 = 0$, $b_1 \neq 0$ e $b_2 = 0$	25
6.3.3	Caso 3: $b_0 = 0$, $b_1 = 0$ e $b_2 \neq 0$	26
6.3.4	Caso 4: $b_0 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ e $b_2 = 0$	28
6.3.5	Caso 5: $b_0 = 0$, $b_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$	29
6.3.6	Caso 6: $b_0 \neq 0$, $b_1 = 0$ e $b_2 \neq 0$	30
6.3.7	Caso 7: $b_0 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$	31
II	Prática	33
7	Listagens de códigos	35
7.1	Introdução	35
7.2	Adição e subtração de vetores	35
7.3	Ganho e relações entre ganhos, para zeros e pólos	41
	Referências bibliográficas	47

Parte I

Teoria

Capítulo 1

Introdução

O principal assunto abordado nesse texto, que é a influência dos zeros e dos pólos da Função de Transferência de um sistema no formato da sua função Resposta em Frequência, pode ser pensado como um conteúdo puramente matemático ou como um tópico de suporte para Teoria de Sistemas, Teoria de Controle, Teoria de Circuitos e Teoria de Processamento de Sinais.

As seguintes motivações conduziram à produção do presente documento:

- Desenvolver um texto a ser usado como exemplo de aplicação em disciplinas com conteúdo puramente matemático.
- Desenvolver um texto a ser usado como justificativa teórica em disciplinas destinadas puramente a aplicações do conteúdo.
- Desenvolver um texto a ser usado como ligação entre os dois tipos de disciplinas citados acima.
- Reunir, em um texto específico, alguns conteúdos referentes ao assunto em questão.
- Em Teoria de Sistemas, ter um bom conhecimento sobre o efeito causado por cada tipo de singularidade pode ajudar a entender o funcionamento de um dado sistema.
- Em Teoria de Controle, entre outros objetivos, procura-se alcançar um determinado posicionamento das singularidades do sistema. Ter um bom conhecimento sobre o efeito causado por cada tipo de singularidade pode ajudar no entendimento das diversas técnicas de análise e de projeto.
- Em Teoria de Circuitos e em Processamento de Sinais, entre outros objetivos, trabalha-se com sistemas que possuem seletividade em frequência, denominados de filtros. Ter um bom conhecimento sobre o efeito causado por cada tipo de singularidade pode ajudar no entendimento das diversas técnicas de análise e de projeto.

O objetivo do documento é apresentar um texto básico, introdutório e intuitivo, com foco principal sobre a influência dos zeros e dos pólos da Função de Transferência de um sistema no formato da sua função Resposta em Frequência.

O texto possui a seguinte estrutura:

- Polinômios: onde é apresentada uma breve revisão sobre o assunto.
- Polinômios na Teoria de Sistemas: onde são definidos um determinado tipo de sistema e três de suas representações.
- Definição e influência de singularidades: onde são definidas as singularidades (zeros e pólos) da Função de Transferência de um sistema e a sua influência sobre a forma da Resposta em Frequência do sistema.
- Polinômios em Filtros Digitais: onde são definidos itens relativos à filtragem digital, tais como: espectro, análise espectral, filtragem, parâmetros relevantes.
- Exemplos de filtros digitais: onde são analisadas algumas equações de filtros digitais de primeira e de segunda ordem.

Capítulo 2

Polinômios

2.1 Introdução

Na Teoria de Sistemas e no Processamento de Sinais, polinômios são largamente utilizados. A seguir, alguns aspectos básicos sobre polinômios são brevemente abordados.

2.2 Polinômios como elementos de um conjunto

2.2.1 Definições

Os polinômios podem ser interpretados, do ponto de vista algébrico, como elementos individuais de um conjunto. Nesse sentido, independentemente da sua complexidade, cada polinômio é identificado como um único símbolo.

Dado um corpo (*field*) \mathcal{F} e um símbolo abstrato x , outros símbolos podem ser obtidos, associando-se x e as quantidades em \mathcal{F} , por meio das operações de adição, subtração e multiplicação. Cada uma das possíveis associações é dita um polinômio em x sobre \mathcal{F} ou, simplesmente, um polinômio. Assim, qualquer expressão do tipo

$$f(x) = c_M x^M + c_{M-1} x^{M-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 ,$$

com $c_k \in \mathcal{F}$, é um polinômio. O conjunto $\mathcal{F}[x]$, de todos os polinômios em x com coeficientes em \mathcal{F} , é chamado de domínio polinomial sobre \mathcal{F} .

2.2.2 Observações relevantes

Em relação aos polinômios, pode-se observar que:

- As quantidades $q_k \in \mathcal{F}$ são membros do conjunto $\mathcal{F}[x]$, sendo chamadas de constantes ou polinômios constantes $c_{0_k} = q_k$.
- Segundo esse ponto de vista, a equação $f(x) = 0$ define o polinômio nulo, onde $c_k = 0$, $0 \leq k \leq M$.
- Se $c_M \neq 0$, então diz-se que $f(x)$ tem grau M , de tal forma que $M = \text{grau}(f(x))$.
- Se $M = \text{grau}(f(x))$, então c_M é dito o coeficiente dominante (*leading coefficient*).
- Se $M = \text{grau}(f(x))$ e $c_M = 1$, então $f(x)$ é dito mônico.

- O grau do polinômio nulo é indefinido.
- São válidas as seguintes relações:

$$\text{grau}(f(x) + g(x)) \leq \max(\text{grau}(f(x)), \text{grau}(g(x)))$$

e

$$\text{grau}(f(x) \cdot g(x)) = \text{grau}(f(x)) + \text{grau}(g(x)) .$$

2.3 Polinômios como funções

2.3.1 Definições

Do ponto de vista funcional, os polinômios podem ser encarados como mapeamentos do tipo $x \rightarrow f(x)$. Dessa forma, o polinômio

$$f(x) = c_M x^M + c_{M-1} x^{M-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

pode ser interpretado como uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Dada uma sequência de números complexos $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_M)$, denominados de coeficientes de $f(x)$, o polinômio mapeia um número complexo x_k em um outro número complexo $f(x_k)$, identificado como a imagem de x_k . Por esse motivo, um polinômio pode também ser chamado de função polinomial.

2.3.2 Equação polinomial ou equação algébrica

Dadas as funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$, uma equação polinomial ou equação algébrica é a sentença aberta $f(x) = g(x)$.

Deve ser ressaltado que uma sentença aberta em x pode ser verdadeira ou falsa, dependendo do valor atribuído a x .

2.3.3 Raízes de uma equação polinomial

Dada a equação polinomial $f(x) = g(x)$, o número r é identificado como raiz da equação se, e somente se, $f(r) = g(r)$ for uma sentença verdadeira.

O conjunto $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_R)$, de todas as raízes da equação, é denominado de conjunto-solução ou conjunto-verdade da equação.

No caso onde $g(x) = 0$, pode-se dizer que a raiz r é um valor que anula $f(x)$ e que, portanto, r é um zero de $f(x)$.

Dada a função polinomial

$$f(x) = c_M x^M + c_{M-1} x^{M-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

e a equação polinomial $f(x) = 0$, com as suas M raízes r_k , a função pode ser reescrita como

$$f(x) = K(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_M) ,$$

onde $K = c_M$, obtendo-se uma relação entre os coeficientes c_k da função e as raízes r_k da equação.

Nos casos onde $f(x)$ possui m raízes com o mesmo valor r_k , diz-se que a raiz r_k tem multiplicidade m .

2.4 Fração ou razão polinomial

2.4.1 Função polinomial racional

Na Teoria de Sistemas e no Processamento de Sinais, é muito comum que se encontrem as chamadas Funções Polinomiais Racionais, que são definidas como uma fração ou uma razão polinomial do tipo

$$F(x) = \frac{N_F(x)}{D_F(x)} = \frac{b_L x^L + \cdots + b_1 x + b_0}{a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0} = \frac{\sum_{k=0}^L b_k x^k}{\sum_{k=0}^N a_k x^k}. \quad (2.1)$$

2.4.2 Fração imprópria e fração própria

Na Equação (2.1), se $L < N$, $F(x)$ é dita uma fração polinomial própria. Caso contrário, se $L \geq N$, $F(x)$ é dita uma fração polinomial imprópria.

Uma fração polinomial imprópria pode ser fatorada e definida em função de um polinômio e de uma fração polinomial própria, de tal forma que

$$F(x) = \frac{N_F(x)}{D_F(x)} = \frac{b_L x^L + \cdots + b_1 x + b_0}{a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0} = P(x) + \frac{c_M x^M + \cdots + c_1 x + c_0}{a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0},$$

onde: $\text{grau}(P(x)) = (L - N)$ e $M < N$.

2.4.3 Raízes, zeros e pólos da fração

Da Equação (2.1), percebe-se que os zeros de $N_F(x)$ anulam $F(x)$. Da mesma forma, percebe-se que os zeros de $D_F(x)$ fazem $F(x)$ tender a infinito. Por essa razão, os zeros r_k de $N_F(x)$ são denominados os zeros z_k de $F(x)$ e os zeros r_k de $D_F(x)$ são denominados os pólos p_k de $F(x)$. De uma forma geral, os zeros e os pólos são denominados de singularidades de $F(x)$.

Utilizando-se os zeros e os pólos de $F(x)$, pode-se reescrever (2.1) como

$$F(x) = \frac{N_F(x)}{D_F(x)} = \frac{b_L x^L + \cdots + b_1 x + b_0}{a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0} = K \frac{(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_L)}{(x - p_1)(x - p_2) \cdots (x - p_N)}, \quad (2.2)$$

onde $K = (b_L/a_N)$.

2.4.4 Total de singularidades da fração

Pode-se demonstrar que a quantidade de zeros e de pólos de $F(x)$ são sempre iguais. Dessa forma, em (2.2), podem-se identificar os seguintes casos:

- $L < N$: há um total de $(N-L)$ zeros no infinito.
- $L = N$: todos os zeros e todos os pólos são finitos.
- $L > N$: há um total de $(L-N)$ pólos no infinito.

2.4.5 Fatorações básicas da fração

Conhecendo-se os zeros z_k e os pólos p_k , podem-se realizar duas fatorações básicas em $F(x)$. Independentemente do tipo da fração (imprópria ou própria), a primeira delas é apresentada na Equação (2.2). Uma outra forma de fatoração, aplicada sobre frações próprias, é a expansão em frações parciais. Por exemplo, no caso de pólos distintos, ela pode assumir a seguinte forma:

$$F(x) = \frac{N_F(x)}{D_F(x)} = \frac{b_L x^L + \cdots + b_1 x + b_0}{a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0} = \frac{K_1}{(x - p_1)} + \frac{K_2}{(x - p_2)} + \cdots + \frac{K_N}{(x - p_N)} .$$

2.4.6 Representações com potências negativas

Por vezes, devido a uma facilidade no mapeamento entre representações de sistemas, uma fração é representada com potências negativas, tal como

$$F(x) = \frac{N_F(x)}{D_F(x)} = \frac{b_L x^L + \cdots + b_1 x + b_0}{a_N x^N + \cdots + a_1 x + a_0} = z^{(L-N)} \frac{b_L + \cdots + b_1 x^{-(L-1)} + b_0 x^{-L}}{a_N + \cdots + a_1 x^{-(N-1)} + a_0 x^{-N}} .$$

Capítulo 3

Aplicação de polinômios na Teoria de Sistemas

3.1 Sistemas do tipo SLIT

Um Sistema Linear e Invariante ao Tempo (SLIT), analógico ou digital, possui características muito interessantes, tanto para a sua análise quanto para o seu projeto.

No caso de um SLIT digital, com entrada $x[n]$ e saída $y[n]$, definido pela equação de diferença

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_N x[n-N] , \quad (3.1)$$

submetido às condições iniciais $y[-k] = [y[-1], y[-2], \dots, y[-N]]$, e a uma entrada do tipo $x[n] = f[n] u[n]$, é possível definir duas funções úteis para uma análise da composição espectral dos sinais presentes no SLIT. A primeira delas é a Função de Transferência, definida por

$$H(z) = \frac{N_H(z)}{D_H(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} ,$$

onde $z = |z| e^{j\angle z} = |z| e^{j\Omega}$. A outra é a função Resposta em Frequência, definida por

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{N_H(e^{j\Omega})}{D_H(e^{j\Omega})} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k e^{-j\Omega k}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\Omega k}} .$$

Nesse caso, quando todos os pólos p_k de $H(z)$ encontram-se estritamente dentro do círculo de raio unitário ($|p_k| < 1$), garante-se que a sua região de convergência (ROC) inclui o círculo de raio unitário ($z = e^{j\Omega}$), o que permite definir a seguinte relação:

$$H(e^{j\Omega}) = H(z)|_{|z|=1} .$$

Tal relação será considerada válida em todo o restante desse texto. Alguns equacionamentos equivalentes são apresentados a seguir, para ambas as funções.

3.2 Função de Transferência

Dada a Função de Transferência

$$H(z) = \frac{N_H(z)}{D_H(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}, \quad (3.2)$$

a mesma pode ser fatorada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N})}{(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N})} \\ &= \frac{(b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \dots + b_N)}{(a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_N)} \\ &= \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{(z^N + \frac{b_1}{b_0} z^{N-1} + \frac{b_2}{b_0} z^{N-2} + \dots + \frac{b_N}{b_0})}{(z^N + \frac{a_1}{a_0} z^{N-1} + \frac{a_2}{a_0} z^{N-2} + \dots + \frac{a_N}{a_0})} \\ &= K_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)} \\ &= K_0 \frac{n_1(z) n_2(z) \dots n_N(z)}{d_1(z) d_2(z) \dots d_N(z)}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde: $K_0 = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)$, $n_k(z) = (z - z_k)$ e $d_k(z) = (z - p_k)$.

3.3 Função Resposta em Frequência

Supondo-se que a região de convergência (ROC) da $H(z)$ definida em (3.2) inclui o círculo de raio unitário ($z = e^{j\Omega}$), a função Resposta em Frequência a ela associada é dada por

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{N_H(e^{j\Omega})}{D_H(e^{j\Omega})} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k e^{-j\Omega k}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\Omega k}}, \quad (3.4)$$

que pode ser fatorada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= K_0 \frac{(e^{j\Omega} - z_1)(e^{j\Omega} - z_2) \dots (e^{j\Omega} - z_N)}{(e^{j\Omega} - p_1)(e^{j\Omega} - p_2) \dots (e^{j\Omega} - p_N)} \\ &= K_0 \frac{n_1(\Omega) n_2(\Omega) \dots n_N(\Omega)}{d_1(\Omega) d_2(\Omega) \dots d_N(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde: $K_0 = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)$, $n_k(\Omega) = (e^{j\Omega} - z_k)$ e $d_k(\Omega) = (e^{j\Omega} - p_k)$.

Cabe ressaltar que, interpretando-se os valores complexos $e^{j\Omega}$, z_k e p_k , como vetores, pode-se dizer que:

- $n_k(\Omega_l)$ é o vetor diferença entre o ponto do círculo de raio unitário $e^{j\Omega_l}$ e o zero z_k .
- $d_k(\Omega_l)$ é o vetor diferença entre o ponto do círculo de raio unitário $e^{j\Omega_l}$ e o pólo p_k .

Capítulo 4

Influência da posição dos zeros e dos pólos da $H(z)$ no formato da $H(e^{j\Omega})$

4.1 Introdução

A seguir, é realizada uma análise geométrica da influência da posição dos zeros e dos pólos da Função de Transferência $H(z)$ no formato da função Resposta em Frequência $H(e^{j\Omega})$. Para tal, os números complexos, representados na sua forma polar $z = r e^{j\Omega}$, são interpretados como vetores, de módulo r e de argumento ou ângulo de fase Ω .

4.2 Combinação genérica de zeros e pólos

Dada a Função de Transferência genérica

$$H(z) = K_H \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_L)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_N)},$$

cuja ROC inclui o círculo de raio unitário, a mesma pode ser associada à função Resposta em Frequência

$$H(e^{j\Omega}) = K_H \frac{(e^{j\Omega} - z_1)(e^{j\Omega} - z_2) \cdots (e^{j\Omega} - z_L)}{(e^{j\Omega} - p_1)(e^{j\Omega} - p_2) \cdots (e^{j\Omega} - p_N)} = K_H \frac{n_1(\Omega) n_2(\Omega) \cdots n_L(\Omega)}{d_1(\Omega) d_2(\Omega) \cdots d_N(\Omega)}.$$

As curvas de módulo $|H(e^{j\Omega})|$ e de ângulo de fase $\angle H(e^{j\Omega})$ da Resposta em Frequência podem ser obtidas por meio da análise da influência do ganho K_H , dos zeros z_k e dos pólos p_k . Nesse sentido, tem-se que

$$|H(e^{j\Omega})| = |K_H| \frac{\prod_{k=1}^L |n_k(\Omega)|}{\prod_{k=1}^N |d_k(\Omega)|}$$

e

$$\angle H(e^{j\Omega}) = \angle K_H + \sum_{k=1}^L \angle n_k(\Omega) - \sum_{k=1}^N \angle d_k(\Omega).$$

Alternativamente, representando-se o módulo em decibéis (dB), onde $|\cdot|_{dB} = 20 \log_{10} |\cdot|$ dB, obtém-se

$$|H(e^{j\Omega})|_{dB} = |K_H|_{dB} + \sum_{k=1}^L |n_k(\Omega)|_{dB} - \sum_{k=1}^N |d_k(\Omega)|_{dB}.$$

4.3 Influência dos zeros

Supondo-se a Função de Transferência $H_{z_k}(z) = (z - z_k)$, onde $z_k = r_k e^{j\Omega_k}$, a Resposta em Frequência a ela associada é dada por $H_{z_k}(e^{j\Omega}) = (e^{j\Omega} - z_k) = n_k(\Omega)$.

Do ponto de vista algébrico, pode-se calcular

$$\begin{aligned}
 |H_{z_k}(e^{j\Omega})| &= |(e^{j\Omega} - r_k e^{j\Omega_k})| \\
 &= |(1 - r_k e^{j(\Omega_k - \Omega)}) e^{j\Omega}| \\
 &= |(1 - r_k e^{j(\Omega_k - \Omega)})| \\
 &= |1 - r_k [\cos(\Omega_k - \Omega) + j \sin(\Omega_k - \Omega)]| \\
 &= |[1 - r_k \cos(\Omega_k - \Omega)] + j [-r_k \sin(\Omega_k - \Omega)]| \\
 &= \sqrt{1 - 2r_k \cos(\Omega_k - \Omega) + r_k^2 \cos^2(\Omega_k - \Omega) + r_k^2 \sin^2(\Omega_k - \Omega)} \\
 &= \sqrt{1 - [2 \cos(\Omega_k - \Omega)] r_k + r_k^2} .
 \end{aligned}$$

Do ponto de vista geométrico, interpretando-se os valores complexos $e^{j\Omega}$ e z_k como vetores, $n_k(\Omega_k)$ é o vetor diferença entre o ponto do círculo de raio unitário $e^{j\Omega_k}$ e o zero z_k .

Dois valores notáveis de $n_k(\Omega)$ ocorrem em $\Omega_{min} = \Omega_k$, que é o ponto do círculo mais próximo de z_k e em $\Omega_{max} = \Omega_{k\pi} = (\Omega_k \pm \pi)$, que é o ponto do círculo mais distante de z_k . Nesses pontos, tem-se que $|n_k(\Omega)|$ é mínimo e máximo, respectivamente. Logo, nesses pontos, $|H_{z_k}(e^{j\Omega})|$ sofrerá um efeito de ganho mínimo e máximo, respectivamente.

Para Ω_k , o valor de $n_k(\Omega)$ é dado por

$$\begin{aligned}
 n_k(\Omega_k) &= (e^{j\Omega_k} - r_k e^{j\Omega_k}) = (1 - r_k) e^{j\Omega_k} \\
 &= \begin{cases} (1 - r_k) e^{j\Omega_k} & , \quad 0 \leq r_k \leq 1 \\ -|1 - r_k| e^{j\Omega_k} = |1 - r_k| e^{j(\Omega_k \pm \pi)} & , \quad r_k \geq 1 \end{cases} ,
 \end{aligned}$$

de tal forma que

$$|H_{z_k}(e^{j\Omega_k})| = n_k(\Omega_k) = |1 - r_k| .$$

Para $\Omega_{k\pi} = (\Omega_k \pm \pi)$, o valor de $n_k(\Omega)$ é dado por

$$\begin{aligned}
 n_k(\Omega_{k\pi}) &= (e^{j(\Omega_k \pm \pi)} - r_k e^{j\Omega_k}) = (1 - r_k e^{j(\pm\pi)}) e^{j(\Omega_k \pm \pi)} \\
 &= [(-1)e^{j\Omega_k} - r_k e^{j\Omega_k}] = -(1 + r_k) e^{j\Omega_k} \\
 &= (1 + r_k) e^{j(\Omega_k \pm \pi)} ,
 \end{aligned}$$

de tal forma que

$$|H_{z_k}(e^{j\Omega_{k\pi}})| = n_k(\Omega_{k\pi}) = |1 + r_k| .$$

Os efeitos causados pelo zero $z_k = r_k e^{j\Omega_k}$ sobre $|H_{z_k}(e^{j\Omega})| = |n_k(\Omega)|$ são resumidos na Tabela 4.1.

r_k	$n_k(\Omega) = (e^{j\Omega} - z_k)$	Influência de z_k sobre $ H_{z_k}(e^{j\Omega}) = n_k(\Omega) $
$r_k = 0$	$\forall \Omega: n_k(\Omega) = 1$	amplificação unitária
$0 < r_k < 1$	Mín: $0 < n_k(\Omega_k) < 1$	atenuação máxima
	Máx: $1 < n_k(\Omega_{k\pi}) < 2$	amplificação máxima
$ r_k = 1$	Mín: $ n_k(\Omega_k) = 0$	atenuação máxima
	Máx: $ n_k(\Omega_{k\pi}) = 2$	amplificação máxima
$1 < r_k < 2$	Mín: $0 < n_k(\Omega_k) < 1$	atenuação máxima
	Máx: $2 < n_k(\Omega_{k\pi}) < 3$	amplificação máxima
$ r_k = 2$	Mín: $ n_k(\Omega_k) = 1$	amplificação unitária
	Máx: $ n_k(\Omega_{k\pi}) = 3$	amplificação máxima
$ r_k > 2$	Mín: $ n_k(\Omega_k) > 1$	amplificação mínima
	Máx: $ n_k(\Omega_{k\pi}) > 3$	amplificação máxima

Nota 1: $\Omega_{k\pi} = (\Omega_k \pm \pi)$.

Nota 2: $|n_k(\Omega_k)| = |1 - |z_k||$.

Nota 3: $|n_k(\Omega_{k\pi})| = |1 + |z_k||$.

Tabela 4.1: Influência da posição do zero $z_k = r_k e^{j\Omega_k}$ de $H(z)$ no formato de $|H(e^{j\Omega})|$.

Portanto, pode-se concluir que:

- Um zero de $H(z)$ na posição $z_k = r_k e^{j\Omega_k}$, onde $0 < |r_k| < 2$, tem o efeito de provocar uma atenuação máxima no valor do módulo $|H(e^{j\Omega})|$ em $\Omega = \Omega_k$ e na sua vizinhança.
- Um zero de $H(z)$ na posição $z_k = r_k e^{j\Omega_k}$, onde $|r_k| > 2$, tem o efeito de provocar uma amplificação mínima no valor do módulo $|H(e^{j\Omega})|$ em $\Omega = \Omega_k$ e na sua vizinhança.
- Um zero de $H(z)$ na posição $z_k = r_k e^{j\Omega_k}$, onde $0 < |r_k|$, tem o efeito de provocar uma amplificação máxima no valor do módulo $|H(e^{j\Omega})|$ em $\Omega = \Omega_{k\pi} = (\Omega_k \pm \pi)$ e na sua vizinhança.
- Ocorre uma amplificação unitária para qualquer valor de Ω , quando $r_k = 0$, e em $\Omega = \Omega_k$, quando $|r_k| = 2$.
- O efeito de atenuação, causado pelo zero $z_k = r_k e^{j\Omega_k}$, é diretamente proporcional à sua proximidade ao círculo de raio unitário, sendo máximo quando $|r_k| = 1$, onde $|n_k(\Omega_k)| = 0$.

4.4 Influência dos pólos

Supondo-se a Função de Transferência $H_{p_k}(z) = 1 / (z - p_k)$, onde $p_k = r_k e^{j\Omega_k}$, a Resposta em Frequência a ela associada é dada por $H_{p_k}(e^{j\Omega}) = 1 / (e^{j\Omega} - p_k) = 1 / d_k(\Omega)$.

Do ponto de vista algébrico, pode-se calcular

$$\begin{aligned}
 |H_{p_k}(e^{j\Omega})| &= \frac{1}{|(e^{j\Omega} - r_k e^{j\Omega_k})|} \\
 &= \frac{1}{|(1 - r_k e^{j(\Omega_k - \Omega)}) e^{j\Omega}|} \\
 &= \frac{1}{|(1 - r_k e^{j(\Omega_k - \Omega)})|} \\
 &= \frac{1}{|1 - r_k [\cos(\Omega_k - \Omega) + j \sin(\Omega_k - \Omega)]|} \\
 &= \frac{1}{|[1 - r_k \cos(\Omega_k - \Omega)] + j [-r_k \sin(\Omega_k - \Omega)]|} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2r_k \cos(\Omega_k - \Omega) + r_k^2 \cos^2(\Omega_k - \Omega) + r_k^2 \sin^2(\Omega_k - \Omega)}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - [2 \cos(\Omega_k - \Omega)] r_k + r_k^2}}.
 \end{aligned}$$

Do ponto de vista geométrico, interpretando-se os valores complexos $e^{j\Omega}$ e p_k como vetores, $d_k(\Omega_k)$ é o vetor diferença entre o ponto do círculo de raio unitário $e^{j\Omega_k}$ e o pólo p_k .

Dois valores notáveis de $d_k(\Omega)$ ocorrem em $\Omega_{min} = \Omega_k$, que é o ponto do círculo mais próximo de p_k e em $\Omega_{max} = \Omega_{k\pi} = (\Omega_k \pm \pi)$, que é o ponto do círculo mais distante de p_k . Nesses pontos, tem-se que $|d_k(\Omega)|$ é mínimo e máximo, respectivamente. Logo, nesses pontos, $|H_{p_k}(e^{j\Omega})|$ sofrerá um efeito de ganho máximo e mínimo, respectivamente.

Para Ω_k e $0 \leq r_k < 1$, o valor de $d_k(\Omega)$ é dado por

$$d_k(\Omega_k) = (e^{j\Omega_k} - r_k e^{j\Omega_k}) = (1 - r_k) e^{j\Omega_k},$$

de tal forma que

$$|H_{p_k}(e^{j\Omega_k})| = \frac{1}{|d_k(\Omega_k)|} = \frac{1}{(1 - r_k)}.$$

Para $\Omega_{k\pi} = (\Omega_k \pm \pi)$ e $0 \leq r_k < 1$, o valor de $d_k(\Omega)$ é dado por

$$\begin{aligned}
 d_k(\Omega_{k\pi}) &= (e^{j(\Omega_k \pm \pi)} - r_k e^{j\Omega_k}) = (1 - r_k e^{j(\pm\pi)}) e^{j(\Omega_k \pm \pi)} \\
 &= [(-1)e^{j\Omega_k} - r_k e^{j\Omega_k}] = -(1 + r_k) e^{j\Omega_k} \\
 &= (1 + r_k) e^{j(\Omega_k \pm \pi)},
 \end{aligned}$$

de tal forma que

$$|H_{p_k}(e^{j\Omega_{k\pi}})| = \frac{1}{|d_k(\Omega_{k\pi})|} = \frac{1}{(1 + r_k)}.$$

Os efeitos causados pelo pólo $p_k = r_k e^{j\Omega_k}$ sobre $|H_{p_k}(e^{j\Omega})| = 1 / |d_k(\Omega)|$ são resumidos na Tabela 4.2.

r_k	$d_k(\Omega) = (e^{j\Omega} - p_k)$	Influência de p_k sobre $ H_{p_k}(e^{j\Omega}) = 1 / d_k(\Omega) $
$r_k = 0$	$\forall \Omega: d_k(\Omega) = 1$	amplificação unitária
$0 < r_k < 1$	Mín: $ d_k(\Omega_k) < 1$	amplificação máxima
	Máx: $1 < d_k(\Omega_{k\pi}) < 2$	atenuação máxima

Nota 1: $\Omega_{k\pi} = (\Omega_k \pm \pi)$.

Nota 2: $|d_k(\Omega_k)| = |1 - |p_k||$.

Nota 3: $|d_k(\Omega_{k\pi})| = |1 + |p_k||$.

Tabela 4.2: Influência da posição do pólo $p_k = r_k e^{j\Omega_k}$ de $H(z)$ no formato de $|H(e^{j\Omega})|$.

Portanto, pode-se concluir que:

- Um pólo de $H(z)$ na posição $p_k = r_k e^{j\Omega_k}$, onde $0 < |r_k| < 1$, tem o efeito de provocar uma amplificação máxima no valor do módulo $|H(e^{j\Omega})|$ em $\Omega = \Omega_k$ e na sua vizinhança.
- Um pólo de $H(z)$ na posição $p_k = r_k e^{j\Omega_k}$, onde $0 < |r_k| < 1$, tem o efeito de provocar uma atenuação máxima no valor do módulo $|H(e^{j\Omega})|$ em $\Omega = \Omega_{k\pi} = (\Omega_k \pm \pi)$ e na sua vizinhança.
- Ocorre uma amplificação unitária para qualquer valor de Ω , quando $r_k = 0$.
- O efeito de amplificação, causado pelo zero $p_k = r_k e^{j\Omega_k}$, é diretamente proporcional à sua proximidade ao círculo de raio unitário.

Capítulo 5

Aplicação de polinômios em Filtros Digitais

5.1 Análise espectral

Suponha um SLIT com Função de Transferência $H(z)$ e Resposta em Frequência $H(e^{j\Omega})$, cuja resposta ao impulso $\delta[n]$ é do tipo $h[n] = f[n] u[n]$. Quando todos os pólos p_k de $H(z)$ encontram-se estritamente dentro do círculo de raio unitário ($|p_k| < 1$), garante-se que a sua região de convergência (ROC) inclui o círculo de raio unitário ($z = e^{j\Omega}$), o que permite definir a seguinte relação:

$$H(e^{j\Omega}) = H(z)|_{|z|=1} .$$

Nesse caso, diz-se que o sistema é estável.

Em um SLIT estável, quando é aplicada uma entrada do tipo $x[n] = f[n] u[n]$, obtém-se uma saída $y[n] = y_{tran}[n] + y_{perm}[n]$ cujas componentes $y_{tran}[n]$ e $y_{perm}[n]$ são dos tipos transitória e permanente, respectivamente. Nesse caso, podem ser definidos dois intervalos de tempo diferentes, que são: o regime transitório e o regime permanente. No regime transitório, encontram-se as duas componentes de $y[n]$. Do instante onde $y_{tran}[n] = 0$ em diante, define-se o regime permanente.

Dado um SLIT relaxado (condições iniciais nulas ou estado inicial nulo), com entrada $x[n]$ e saída $y[n]$, pode-se mostrar que:

- Se $x_k[n] = c_k z_k^n u[n]$, então $y_k[n] = H(z_k) c_k z_k^n u[n]$.
- Se $x_k[n] = c_k e^{j\Omega_k n} u[n]$, então $y_k[n] = H(e^{j\Omega_k}) c_k e^{j\Omega_k n} u[n]$.
- Se $x_k[n] = A_k \cos(\Omega_k n + \Theta_k) u[n]$,
então $y_k[n] = |H(e^{j\Omega_k})| A_k \cos(\Omega_k n + \Theta_k + \angle H(e^{j\Omega_k})) u[n]$.

Aproveitando-se a característica de linearidade do sistema, pode-se tentar descrever a entrada por uma combinação linear de exponenciais e utilizar as relações acima. Isso é obtido por meio do cálculo das funções $X(z) = f(x[n], z^n)$ e $X(e^{j\Omega}) = g(x[n], e^{j\Omega n})$, que são denominadas de composição espectral ou espectro de $x[n]$. Nesse caso, as exponenciais z^n e $e^{j\Omega n}$, envolvidas na composição da entrada, são denominadas de componentes espectrais de $x[n]$. Da mesma forma, pode-se definir a saída $y[n]$ em função das suas componentes espectrais, por meio de $Y(z)$ e $Y(e^{j\Omega})$. Pode-se demonstrar que, para um SLIT relaxado, são válidas as seguintes relações: $Y(z) = H(z) X(z)$ e $Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) X(e^{j\Omega})$. A análise de sistemas, empregando-se as componentes espectrais dos sinais, as Funções de Transferência e as Respostas em Frequência, é denominada de análise espectral.

Pode-se mostrar que a Resposta em Frequência $H(e^{j\Omega})$ é útil para cálculos de resposta do sistema no regime permanente senoidal, enquanto a Função de Transferência $H(z)$ pode ser usada para cálculos de resposta total do sistema, para o cálculo de $H(e^{j\Omega})$ e para uma análise de estabilidade do sistema.

Deve-se lembrar que, no caso de um SLIT descrito por (3.1), suas funções $H(z)$ e $H(e^{j\Omega})$ são dadas por 3.2 e 3.4, respectivamente.

5.2 Filtragem: transformação espectral e conformação

Considere-se que:

- A relação de Euler, dada por $e^{\pm j\theta} = \cos(\theta) \pm j \sin(\theta)$, estabelece uma relação entre sinais exponenciais e senoidais.
- A entrada e a saída de um SLIT, definido por uma equação de diferença, sejam $x[n]$ e de $y[n]$, respectivamente.
- As funções $X(e^{j\Omega})$ e $Y(e^{j\Omega})$ representam a composição espectral ou espectro de $x[n]$ e de $y[n]$, respectivamente.
- A Resposta em Frequência do SLIT seja $H(e^{j\Omega})$.
- A relação $Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) X(e^{j\Omega})$ é válida no regime permanente de um SLIT estável.

Dados que as composições espectrais são funções complexas, podem-se definir as seguintes relações:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\Omega}) &= |Y(e^{j\Omega})| e^{j\angle Y(e^{j\Omega})} , \\ H(e^{j\Omega}) &= |H(e^{j\Omega})| e^{j\angle H(e^{j\Omega})} , \\ X(e^{j\Omega}) &= |X(e^{j\Omega})| e^{j\angle X(e^{j\Omega})} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Y(e^{j\Omega}) &= H(e^{j\Omega}) X(e^{j\Omega}) \\ &= |H(e^{j\Omega})| e^{j\angle H(e^{j\Omega})} |X(e^{j\Omega})| e^{j\angle X(e^{j\Omega})} \\ &= [|H(e^{j\Omega})| \cdot |X(e^{j\Omega})|] e^{j[\angle H(e^{j\Omega}) + \angle X(e^{j\Omega})]} \\ &= |Y(e^{j\Omega})| e^{j\angle Y(e^{j\Omega})} , \end{aligned}$$

onde

$$|Y(e^{j\Omega})| = |H(e^{j\Omega})| \cdot |X(e^{j\Omega})| \quad (5.1)$$

e

$$\angle Y(e^{j\Omega}) = \angle H(e^{j\Omega}) + \angle X(e^{j\Omega}) . \quad (5.2)$$

As Equações (5.1) e (5.2) indicam que, para cada valor da frequência Ω , ou, de outro modo, para cada componente espectral, valem as seguintes observações:

- O módulo da composição espectral da saída é igual ao escalamento do módulo da composição espectral da entrada pelo módulo da Resposta em Frequência do sistema.
- O argumento (ou ângulo de fase) da composição espectral da saída é igual ao acréscimo do argumento da Resposta em Frequência do sistema ao argumento da composição espectral da entrada.

- Escolhendo-se adequadamente o módulo e o argumento da Resposta em Frequência do sistema, pode-se modificar a composição espectral da sua entrada, para que se obtenha, na sua saída, uma nova composição espectral desejada.

Transformar uma dada composição espectral em uma outra desejada pode ser interpretado como uma operação de equalização em frequência, realizada sobre as componentes espectrais originais. Tal operação é conhecida como filtragem. Deve-se lembrar que alterar a composição espectral $X(e^{j\Omega})$ é equivalente a alterar a forma do sinal $x[n]$. Logo, a filtragem de um sinal pode ser encarada como a transformação do espectro ou como a conformação do sinal.

Uma caso particular de transformação espectral muito utilizado é aquele onde as componentes espectrais pertencentes a determinadas faixas de frequências são preservadas, enquanto aquelas pertencentes a outras faixas são fortemente atenuadas. Esse tipo de seletividade em frequência, por controle do módulo, pode assumir as seguintes formas ideais:

- Filtro passa-baixas (*lowpass filter* ou LP):
 $|H(e^{j\Omega})| = 1$, para $0 \leq \Omega \leq \Omega_C$, e $|H(e^{j\Omega})| = 0$, para $\Omega_C \leq \Omega \leq \pi$.
- Filtro passa-altas (*highpass filter* ou HP):
 $|H(e^{j\Omega})| = 0$, para $0 \leq \Omega \leq \Omega_C$, e $|H(e^{j\Omega})| = 1$, para $\Omega_C \leq \Omega \leq \pi$.
- Filtro passa-faixa ou passa-banda (*bandpass filter* ou BP):
 $|H(e^{j\Omega})| = 1$, para $\Omega_{C_L} \leq \Omega \leq \Omega_{C_H}$, e $|H(e^{j\Omega})| = 0$, para $0 \leq \Omega \leq \Omega_{C_L}$ e $\Omega_{C_H} \leq \Omega \leq \pi$.
- Filtro rejeita-faixa ou rejeita-banda (*bandreject filter* ou BR):
 $|H(e^{j\Omega})| = 0$, para $\Omega_{C_L} \leq \Omega \leq \Omega_{C_H}$, e $|H(e^{j\Omega})| = 1$, para $0 \leq \Omega \leq \Omega_{C_L}$ e $\Omega_{C_H} \leq \Omega \leq \pi$.

O caso geral de seletividade em frequência, por controle do módulo, é o equalizador de ganho (*gain equalizer*), onde é definido um perfil específico para $|H(e^{j\Omega})|$.

O caso geral de seletividade em frequência, por controle do argumento (ou ângulo de fase), é o equalizador de fase (*phase equalizer*), onde é definido um perfil específico para $\angle H(e^{j\Omega})$.

5.3 Parâmetros de qualidade na filtragem

Em filtros ideais, uma faixa de frequências onde $|H(e^{j\Omega})| = 1$ é denominada de banda de passagem (*pass band*). Por sua vez, uma faixa de frequências onde $|H(e^{j\Omega})| = 0$ é denominada de banda de rejeição (*rejection band*). Nesses casos, existem descontinuidades entre as bandas de passagem e as bandas de rejeição, que ocorrem nas denominadas frequências de corte Ω_C , Ω_{C_L} e Ω_{C_H} .

Em filtros reais, realizados com uma Resposta em Frequência do tipo $H(e^{j\Omega}) = \frac{N_H(e^{j\Omega})}{D_H(e^{j\Omega})}$, ocorrem efeitos não ideais, tanto nos valores de módulo nas bandas de passagem e de rejeição, quanto na forma de mudança entre tais bandas.

Na banda de passagem, o valor do módulo pode sofrer uma atenuação, e até mesmo uma flutuação, dentro de uma determinada faixa aceitável, definida como $1 \geq |H(e^{j\Omega})| \geq (1 - \delta_p)$, onde δ_p é definida como atenuação máxima na banda de passagem.

Na banda de rejeição, o valor do módulo pode sofrer uma atenuação, e até mesmo uma flutuação, dentro de uma determinada faixa aceitável, definida como $0 \leq |H(e^{j\Omega})| \leq (1 - \delta_r)$, onde δ_r é definida como atenuação mínima na banda de rejeição.

A mudança entre uma banda de passagem e uma banda de rejeição é feita de forma contínua e gradual, formando-se assim uma nova faixa de frequências, denominada de banda de transição (*transition band*). Conseqüentemente, ao invés de uma única frequência de corte Ω_C , que

delimita a mudança abrupta entre as bandas de passagem e de rejeição, surgem duas frequências de delimitação entre bandas. A frequência de passagem Ω_p , que indica o fim da banda de passagem e o início da banda de transição, e a frequência de rejeição Ω_r , que indica o fim da banda de transição e o início da banda de rejeição.

Os parâmetros δ_p , δ_r , Ω_p e Ω_r , compõem, ao mesmo tempo, a especificação de um filtro a ser projetado e os indicadores de qualidade do filtro em questão. Quanto menor for δ_p , quanto maior for δ_r e quanto menor for a distância $|\Omega_p - \Omega_r|$, mais próximo do filtro ideal encontra-se o filtro real.

5.4 Largura da banda de passagem (*bandwidth*)

Uma vez que, em filtro reais, a mudança entre a banda de passagem e a banda de rejeição acontece por meio de uma banda de transição, é razoável que se estabeleça algum critério para que se possa definir o valor da frequência Ω_p , que delimita a banda de passagem.

Uma escolha comum para o valor da frequência de passagem Ω_p é aquele onde a potência das componentes espectrais normalizadas do sinal de saída $y[n]$, dentro da banda de passagem, possuem potência maior ou igual à metade da potência das componentes espectrais do sinal de entrada $x[n]$.

A potência de um sinal periódico, com período fundamental N_F , é definida por

$$P_M = \frac{1}{N_F} \sum_{n=N_0}^{N_0+N_F} |x[n]|^2 .$$

Pode-se mostrar que, para $x[n] = A_k \cos(\Omega_k n + \phi_k)$, a potência é dada por

$$P_{M_x} = \frac{A_k^2}{2} .$$

Dado um sistema com Resposta em Frequência $H(e^{j\Omega})$, onde o valor máximo do módulo dentro da banda de passagem é M , submetido a uma entrada $x[n] = A_k \cos(\Omega_k n + \phi_k)$, a saída normalizada em Regime Permanente é calculada por

$$y[n] = \left(\frac{1}{M} |H(e^{j\Omega_k})| A_k \right) \cos(\Omega_k n + \phi_k + \angle H(e^{j\Omega})) ,$$

e sua potência é dada por

$$P_{M_y} = \frac{\left(\frac{1}{M} |H(e^{j\Omega_k})| A_k \right)^2}{2} .$$

Portanto, Ω_p pode ser calculada por meio da seguinte relação:

$$P_{M_y} \geq \frac{1}{2} P_{M_x} \longrightarrow \frac{\left(\frac{1}{M} |H(e^{j\Omega_k})| A_k \right)^2}{2} \geq \frac{1}{2} \frac{A_k^2}{2} \longrightarrow |H(e^{j\Omega_k})| \geq \frac{M}{\sqrt{2}} ,$$

de tal forma que

$$|H(e^{j\Omega_p})| = \frac{M}{\sqrt{2}} .$$

Capítulo 6

Exemplos de filtros digitais de primeira e de segunda ordem

6.1 Introdução

Para os sistemas de primeira e de segunda ordem é possível obter equações que apresentam simples dedução e fácil emprego, tanto na análise quanto no projeto dos sistemas. A seguir, serão apresentados exemplos de sistemas de primeira e de segunda ordem, com foco na seletividade em frequência. Serão abordadas as seguintes seletividades básicas: passa-baixa (*lowpass*), passa-alta (*highpass*), passa-banda (*bandpass*) e rejeita-banda (*bandreject*). Tais sistemas são denominados de filtros digitais. Serão desenvolvidas equações que relacionam os coeficientes da equação de diferença que define o sistema com as posições das singularidades (zeros e pólos) da sua Função de Transferência. Serão consideradas as diferentes posições que as singularidades podem ocupar. Todo o desenvolvimento matemático é repetido para cada caso, a fim de garantir independência no estudo de cada um deles.

6.2 SLIT de primeira ordem

Aqui, será considerado o SLIT definido por

$$y[n] + a_1 y[n - 1] = b_0 x[n] + b_1 x[n - 1] .$$

Nesse caso, a Função de Transferência do sistema é definida por

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = b_0 \frac{z + \left(\frac{b_1}{b_0}\right)}{z + a_1} = K_0 \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)} = K_0 \frac{n_1(z)}{d_1(z)} ,$$

onde $z_1 = -(b_1/b_0)$, $p_1 = -a_1$, $K_0 = b_0$, $n_1(z) = (z - z_1)$ e $d_1(z) = (z - p_1)$.

Por sua vez, fazendo-se $z = e^{j\Omega}$, a sua Resposta em Frequência é definida por

$$H(e^{j\Omega}) = K_0 \frac{(e^{j\Omega} - z_1)}{(e^{j\Omega} - p_1)} = K_0 \frac{n_1(\Omega)}{d_1(\Omega)} ,$$

onde $n_1(\Omega) = (e^{j\Omega} - z_1)$ e $d_1(\Omega) = (e^{j\Omega} - p_1)$.

6.2.1 Caso 1: $b_0 \neq 0$ e $b_1 = 0$.

A Função de Transferência é dada por

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}} = b_0 \frac{z}{z + a_1} = b_0 \frac{z}{(z - p_1)},$$

onde $z_1 = 0$ e $p_1 = -a_1$.

Fazendo-se $z = e^{j\Omega}$, a Resposta em Frequência é calculada por

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 \frac{(e^{j\Omega})}{(e^{j\Omega} - p_1)}.$$

Relações de seletividade:

- Se $p_1 > 0$, então o SLIT é um filtro do tipo LP e

$$H(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=0} = b_0 \frac{1}{(1 - |p_1|)},$$

de tal forma que, para $H(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=0} = 1$, deve-se ter $b_0 = (1 - |p_1|)$.

- Se $p_1 = 0$, então o SLIT é apenas um escalador com ganho b_0 .
- Se $p_1 < 0$, então o SLIT é um filtro do tipo HP e

$$H(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=\pi} = b_0 \frac{-1}{-1 - (-|p_1|)} = b_0 \frac{1}{(1 - |p_1|)},$$

de tal forma que, para $H(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=\pi} = 1$, deve-se ter $b_0 = (1 - |p_1|)$.

6.2.2 Caso 2: $b_0 = 0$ e $b_1 \neq 0$.

A Função de Transferência é dada por

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = b_1 \frac{1}{z + a_1} = b_1 \frac{1}{(z - p_1)},$$

onde $z_1 \rightarrow \infty$ e $p_1 = -a_1$.

Fazendo-se $z = e^{j\Omega}$, a Resposta em Frequência é calculada por

$$H(e^{j\Omega}) = b_1 \frac{1}{(e^{j\Omega} - p_1)}.$$

Relações de seletividade:

- Se $p_1 > 0$, então o SLIT é um filtro do tipo LP e

$$H(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=0} = b_1 \frac{1}{(1 - |p_1|)},$$

de tal forma que, para $H(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=0} = 1$, deve-se ter $b_1 = (1 - |p_1|)$.

- Se $p_1 = 0$, então o SLIT é formado pela associação cascata de um escalador com ganho b_1 e um atrasador unitário.
- Se $p_1 < 0$, então o SLIT é um filtro do tipo HP e

$$H(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=\pi} = b_1 \frac{1}{-1 - (-|p_1|)} = b_1 \frac{-1}{(1 - |p_1|)},$$

de tal forma que, para $H(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=\pi} = 1$, deve-se ter $b_1 = -(1 - |p_1|)$.

6.2.3 Caso 3: $b_0 \neq 0$ e $b_1 \neq 0$.

A Função de Transferência é dada por

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = b_0 \frac{z + \left(\frac{b_1}{b_0}\right)}{z + a_1} = b_0 \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)},$$

onde $z_1 = -(b_1/b_0)$ e $p_1 = -a_1$.

Fazendo-se $z = e^{j\Omega}$, a Resposta em Frequência é calculada por

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 \frac{(e^{j\Omega} - z_1)}{(e^{j\Omega} - p_1)}.$$

Relações entre a posição do zero e os sinais de b_k :

- Se $z_1 > 0$, então b_1 e b_0 possuem sinais diferentes.
- Se $z_1 = 0$, então $b_1 = 0$ e o SLIT recai no “Caso 1”.
- Se $z_1 < 0$, então b_1 e b_0 possuem sinais iguais.

Relações entre a posição do zero e os valores relativos de b_k :

- Se $|z_1| > 1$, então $|b_1| > |b_0|$.
- Se $|z_1| = \pm 1$, então $|b_1| = |b_0|$.
- Se $|z_1| < 1$, então $|b_1| < |b_0|$.

Relações de seletividade:

- Se $p_1 > 0$ e $z_1 < p_1$, então o SLIT é um filtro do tipo LP e

$$H(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=0} = b_0 \frac{(1 - z_1)}{(1 - |p_1|)},$$

de tal forma que, para $H(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=0} = 1$, deve-se ter $b_0 = \frac{(1-|p_1|)}{(1-z_1)}$ e $b_1 = -b_0 z_1$.

- Se $p_1 = 0$, então o SLIT é formado pela associação paralela de um escalador com ganho b_0 e uma associação cascata de um escalador com ganho b_1 e um atrasador unitário. Os sistemas com esse tipo de estrutura são chamados de FIR (*Finite Impulse Response*). Nesse FIR de primeira ordem, se \rightarrow (**!!! Discutir a seletividade desse FIR !!!**)
- Se $p_1 < 0$ e $z_1 > p_1$, então o SLIT é um filtro do tipo HP e

$$H(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\pi} = b_0 \frac{-1 - z_1}{-1 - (-|p_1|)} = b_0 \frac{(1 + z_1)}{(1 - |p_1|)},$$

de tal forma que, para $H(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\pi} = 1$, deve-se ter $b_0 = \frac{(1-|p_1|)}{(1+z_1)}$ e $b_1 = -b_0 z_1$.

6.3 SLIT de segunda ordem

Aqui, será considerado o SLIT definido por

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2].$$

Nesse caso, a Função de Transferência do sistema é definida por

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = b_0 \frac{z^2 + \left(\frac{b_1}{b_0}\right)z + \left(\frac{b_2}{b_0}\right)}{z^2 + a_1 z + a_2} = K_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)} = K_0 \frac{n_1(z) n_2(z)}{d_1(z) d_2(z)},$$

onde $K_0 = b_0$, $n_k(z) = (z - z_k)$ e $d_k(z) = (z - p_k)$.

Por sua vez, fazendo-se $z = e^{j\Omega}$, a sua Resposta em Frequência é definida por

$$H(e^{j\Omega}) = K_0 \frac{(e^{j\Omega} - z_1)(e^{j\Omega} - z_2)}{(e^{j\Omega} - p_1)(e^{j\Omega} - p_2)} = K_0 \frac{n_1(\Omega) n_2(\Omega)}{d_1(\Omega) d_2(\Omega)},$$

onde $n_k(\Omega) = (e^{j\Omega} - z_k)$ e $d_k(\Omega) = (e^{j\Omega} - p_k)$.

6.3.1 Caso 1: $b_0 \neq 0$, $b_1 = 0$ e $b_2 = 0$.

A Função de Transferência é dada por

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = b_0 \frac{z^2}{z^2 + a_1 z + a_2} = b_0 \frac{z^2}{(z - p_1)(z - p_2)},$$

onde $z_1 = z_2 = 0$, $(p_1 + p_2) = -a_1$ e $(p_1 p_2) = a_2$.

Fazendo-se $z = e^{j\Omega}$, a Resposta em Frequência é calculada por

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 \frac{(e^{j\Omega})^2}{(e^{j\Omega} - p_1)(e^{j\Omega} - p_2)}.$$

Relações quanto ao tipo numérico dos pólos:

- Se $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, o SLIT de segunda ordem pode ser interpretado como uma associação cascata dos casos de primeira ordem.
- Se $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$, então $p_1 = r_p e^{j\Omega_p}$, $p_2 = p_1^* = r_p e^{-j\Omega_p}$ e

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 \frac{(e^{j\Omega})^2}{(e^{j\Omega} - r_p e^{j\Omega_p})(e^{j\Omega} - r_p e^{-j\Omega_p})}.$$

Para $\Omega = \Omega_p$, tem-se que

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\Omega_p} &= b_0 \frac{(e^{j\Omega_p})^2}{[(1 - r_p) e^{j\Omega_p}] [(1 - r_p) e^{-j2\Omega_p}] e^{j\Omega_p}} \\ &= b_0 \frac{1}{(1 - r_p)(1 - r_p e^{-j2\Omega_p})} \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
|H(e^{j\Omega})|_{\Omega=\Omega_p} &= |b_0| \frac{1}{|(1-r_p)| |(1-r_p e^{-j2\Omega_p})|} \\
&= |b_0| \frac{1}{(1-r_p) |1-r_p [\cos(2\Omega_p) - j \sin(2\Omega_p)]|} \\
&= |b_0| \frac{1}{(1-r_p) |[1-r_p \cos(2\Omega_p)] + j [r_p \sin(2\Omega_p)]|} \\
&= |b_0| \frac{1}{(1-r_p) \sqrt{1-2r_p \cos(2\Omega_p) + r_p^2 \cos^2(2\Omega_p) + r_p^2 \sin^2(2\Omega_p)}} \\
&= |b_0| \frac{1}{(1-r_p) \sqrt{1-[2 \cos(2\Omega_p)] r_p + r_p^2}},
\end{aligned}$$

de tal forma que, para $|H(e^{j\Omega})|_{\Omega=\Omega_p} = 1$, deve-se ter $|b_0| = (1-r_p) \sqrt{1-[2 \cos(2\Omega_p)] r_p + r_p^2}$.

Podem-se verificar as seguintes relações de seletividade:

- Se $\Omega_p \approx 0$: o SLIT é um filtro do tipo LP.
- Se $0 < \Omega_p < \pi$: o SLIT é um filtro do tipo BP.
- Se $\Omega_p \approx \pi$: o SLIT é um filtro do tipo HP.

6.3.2 Caso 2: $b_0 = 0$, $b_1 \neq 0$ e $b_2 = 0$.

O sistema desse caso pode ser interpretado como o sistema do “Caso 1” em cascata com um atrasador unitário, fazendo-se $b_0 = b_1$.

A Função de Transferência é dada por

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = b_1 \frac{z}{z^2 + a_1 z + a_2} = b_1 \frac{z}{(z - p_1)(z - p_2)},$$

onde $z_1 = 0$, $z_2 \rightarrow \infty$, $(p_1 + p_2) = -a_1$ e $(p_1 p_2) = a_2$.

Fazendo-se $z = e^{j\Omega}$, a Resposta em Frequência é calculada por

$$H(e^{j\Omega}) = b_1 \frac{(e^{j\Omega})}{(e^{j\Omega} - p_1)(e^{j\Omega} - p_2)}.$$

Relações quanto ao tipo numérico dos pólos:

- Se $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, o SLIT de segunda ordem pode ser interpretado como uma associação cascata dos casos de primeira ordem.
- Se $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$, então $p_1 = r_p e^{j\Omega_p}$, $p_2 = p_1^* = r_p e^{-j\Omega_p}$ e

$$H(e^{j\Omega}) = b_1 \frac{(e^{j\Omega})}{(e^{j\Omega} - r_p e^{j\Omega_p})(e^{j\Omega} - r_p e^{-j\Omega_p})}.$$

Para $\Omega = \Omega_p$, tem-se que

$$\begin{aligned}
H(e^{j\Omega})|_{\Omega=\Omega_p} &= b_1 \frac{(e^{j\Omega_p})}{[(1-r_p) e^{j\Omega_p}] [(1-r_p e^{-j2\Omega_p}) e^{j\Omega_p}]} \\
&= b_1 \frac{1}{(1-r_p)(1-r_p e^{-j2\Omega_p}) (e^{j\Omega_p})}
\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
\left|H(e^{j\Omega})\right|_{\Omega=\Omega_p} &= |b_1| \frac{1}{|(1-r_p)| |(1-r_p e^{-j2\Omega_p})|} \\
&= |b_1| \frac{1}{(1-r_p) |1-r_p [\cos(2\Omega_p) - j \sin(2\Omega_p)]|} \\
&= |b_1| \frac{1}{(1-r_p) |[1-r_p \cos(2\Omega_p)] + j [r_p \sin(2\Omega_p)]|} \\
&= |b_1| \frac{1}{(1-r_p) \sqrt{1-2r_p \cos(2\Omega_p) + r_p^2 \cos^2(2\Omega_p) + r_p^2 \sin^2(2\Omega_p)}} \\
&= |b_1| \frac{1}{(1-r_p) \sqrt{1-[2 \cos(2\Omega_p)] r_p + r_p^2}},
\end{aligned}$$

de tal forma que, para $\left|H(e^{j\Omega})\right|_{\Omega=\Omega_p} = 1$, deve-se ter $|b_1| = (1-r_p) \sqrt{1-[2 \cos(2\Omega_p)] r_p + r_p^2}$.

Podem-se verificar as seguintes relações de seletividade:

- Se $\Omega_p \approx 0$: o SLIT é um filtro do tipo LP.
- Se $0 < \Omega_p < \pi$: o SLIT é um filtro do tipo BP.
- Se $\Omega_p \approx \pi$: o SLIT é um filtro do tipo HP.

6.3.3 Caso 3: $b_0 = 0$, $b_1 = 0$ e $b_2 \neq 0$.

O sistema desse caso pode ser interpretado como o sistema do “Caso 1” em cascata com dois atrasadores unitários, fazendo-se $b_0 = b_2$.

A Função de Transferência é dada por

$$H(z) = \frac{b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = b_2 \frac{1}{z^2 + a_1 z + a_2} = b_2 \frac{1}{(z - p_1)(z - p_2)},$$

onde $z_1 \rightarrow \infty$, $z_2 \rightarrow \infty$, $(p_1 + p_2) = -a_1$ e $(p_1 p_2) = a_2$.

Fazendo-se $z = e^{j\Omega}$, a Resposta em Frequência é calculada por

$$H(e^{j\Omega}) = b_2 \frac{1}{(e^{j\Omega} - p_1)(e^{j\Omega} - p_2)}.$$

Relações quanto ao tipo numérico dos pólos:

- Se $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, o SLIT de segunda ordem pode ser interpretado como uma associação cascata dos casos de primeira ordem.
- Se $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$, então $p_1 = r_p e^{j\Omega_p}$, $p_2 = p_1^* = r_p e^{-j\Omega_p}$ e

$$H(e^{j\Omega}) = b_2 \frac{1}{(e^{j\Omega} - r_p e^{j\Omega_p})(e^{j\Omega} - r_p e^{-j\Omega_p})}.$$

Para $\Omega = \Omega_p$, tem-se que

$$\left|H(e^{j\Omega})\right|_{\Omega=\Omega_p} = b_2 \frac{1}{[(1-r_p) e^{j\Omega_p}][(1-r_p) e^{-j2\Omega_p} e^{j\Omega_p}]}$$

e que

$$\begin{aligned}
|H(e^{j\Omega})|_{\Omega=\Omega_p} &= |b_2| \frac{1}{|(1-r_p)| |(1-r_p e^{-j2\Omega_p})|} \\
&= |b_2| \frac{1}{(1-r_p) |1-r_p [\cos(2\Omega_p) - j \sin(2\Omega_p)]|} \\
&= |b_2| \frac{1}{(1-r_p) |[1-r_p \cos(2\Omega_p)] + j [r_p \sin(2\Omega_p)]|} \\
&= |b_2| \frac{1}{(1-r_p) \sqrt{1-2r_p \cos(2\Omega_p) + r_p^2 \cos^2(2\Omega_p) + r_p^2 \sin^2(2\Omega_p)}} \\
&= |b_2| \frac{1}{(1-r_p) \sqrt{1-[2 \cos(2\Omega_p)] r_p + r_p^2}},
\end{aligned}$$

de tal forma que, para $|H(e^{j\Omega})|_{\Omega=\Omega_p} = 1$, deve-se ter $|b_2| = (1-r_p) \sqrt{1-[2 \cos(2\Omega_p)] r_p + r_p^2}$.

Podem-se verificar as seguintes relações de seletividade:

- Se $\Omega_p \approx 0$: o SLIT é um filtro do tipo LP.
- Se $0 < \Omega_p < \pi$: o SLIT é um filtro do tipo BP.
- Se $\Omega_p \approx \pi$: o SLIT é um filtro do tipo HP.

6.3.4 Caso 4: $b_0 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ e $b_2 = 0$.

O sistema desse caso pode ser interpretado como a associação do sistema do “Caso 1” em paralelo com o sistema do “Caso 2”.

A Função de Transferência é dada por

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = b_0 \frac{z^2 + \left(\frac{b_1}{b_0}\right) z}{z^2 + a_1 z + a_2} = b_0 \frac{(z - z_1)(z)}{(z - p_1)(z - p_2)},$$

onde $z_1 = -(b_1/b_0)$, $z_2 = 0$, $(p_1 + p_2) = -a_1$ e $(p_1 p_2) = a_2$.

Fazendo-se $z = e^{j\Omega}$, a Resposta em Frequência é calculada por

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 \frac{(e^{j\Omega} - z_1)(e^{j\Omega})}{(e^{j\Omega} - p_1)(e^{j\Omega} - p_2)}.$$

Relações quanto ao tipo numérico dos pólos:

- Se $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, o SLIT de segunda ordem pode ser interpretado como uma associação cascata dos casos de primeira ordem.
- Se $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$, então $p_1 = r_p e^{j\Omega_p}$, $p_2 = p_1^* = r_p e^{-j\Omega_p}$ e

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 \frac{(e^{j\Omega} - z_1)(e^{j\Omega})}{(e^{j\Omega} - r_p e^{j\Omega_p})(e^{j\Omega} - r_p e^{-j\Omega_p})}.$$

Para $\Omega = \Omega_p$, tem-se que

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\Omega_p} &= b_0 \frac{[(1 - z_1 e^{-j\Omega_p}) e^{j\Omega_p}](e^{j\Omega_p})}{[(1 - r_p) e^{j\Omega_p}][(1 - r_p) e^{-j2\Omega_p} e^{j\Omega_p}]} \\ &= b_0 \frac{(1 - z_1 e^{-j\Omega_p})}{(1 - r_p)(1 - r_p e^{-j2\Omega_p})} \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} |H(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\Omega_p} &= |b_0| \frac{|(1 - z_1 e^{-j\Omega_p})|}{|(1 - r_p)| |(1 - r_p e^{-j2\Omega_p})|} \\ &= |b_0| \frac{|1 - z_1 [\cos(\Omega_p) - j \sin(\Omega_p)]|}{(1 - r_p) |1 - r_p [\cos(2\Omega_p) - j \sin(2\Omega_p)]|} \\ &= |b_0| \frac{|[1 - z_1 \cos(\Omega_p)] + j [z_1 \sin(\Omega_p)]|}{(1 - r_p) |[1 - r_p \cos(2\Omega_p)] + j [r_p \sin(2\Omega_p)]|} \\ &= |b_0| \frac{\sqrt{1 - 2z_1 \cos(\Omega_p) + z_1^2 \cos^2(\Omega_p) + z_1^2 \sin^2(\Omega_p)}}{(1 - r_p) \sqrt{1 - 2r_p \cos(2\Omega_p) + r_p^2 \cos^2(2\Omega_p) + r_p^2 \sin^2(2\Omega_p)}} \\ &= |b_0| \frac{\sqrt{1 - [2 \cos(\Omega_p)] z_1 + z_1^2}}{(1 - r_p) \sqrt{1 - [2 \cos(2\Omega_p)] r_p + r_p^2}}, \end{aligned}$$

de tal forma que, para $|H(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\Omega_p} = 1$, deve-se ter $|b_0| = (1 - r_p) \left(\frac{\sqrt{1 - [2 \cos(2\Omega_p)] r_p + r_p^2}}{\sqrt{1 - [2 \cos(\Omega_p)] z_1 + z_1^2}} \right)$ e $b_1 = -b_0 z_1$.

6.3.5 Caso 5: $b_0 = 0$, $b_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$.

O sistema desse caso pode ser interpretado como a associação do sistema do “Caso 2” em paralelo com o sistema do “Caso 3”. Além disso, ele também pode ser pensado como o sistema do “Caso 4” em cascata com um atrasador unitário, fazendo-se $b_0 = b_1$ e $b_1 = b_2$.

A Função de Transferência é dada por

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = b_1 \frac{z + \left(\frac{b_2}{b_1}\right)}{z^2 + a_1 z + a_2} = b_1 \frac{(z - z_1)}{(z - p_1)(z - p_2)},$$

onde $z_1 = -(b_2/b_1)$, $z_2 \rightarrow \infty$, $(p_1 + p_2) = -a_1$ e $(p_1 p_2) = a_2$.

Fazendo-se $z = e^{j\Omega}$, a Resposta em Frequência é calculada por

$$H(e^{j\Omega}) = b_1 \frac{(e^{j\Omega} - z_1)}{(e^{j\Omega} - p_1)(e^{j\Omega} - p_2)}.$$

Relações quanto ao tipo numérico dos pólos:

- Se $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, o SLIT de segunda ordem pode ser interpretado como uma associação cascata dos casos de primeira ordem.
- Se $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$, então $p_1 = r_p e^{j\Omega_p}$, $p_2 = p_1^* = r_p e^{-j\Omega_p}$ e

$$H(e^{j\Omega}) = b_1 \frac{(e^{j\Omega} - z_1)}{(e^{j\Omega} - r_p e^{j\Omega_p})(e^{j\Omega} - r_p e^{-j\Omega_p})}.$$

Para $\Omega = \Omega_p$, tem-se que

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\Omega_p} &= b_1 \frac{[(1 - z_1 e^{-j\Omega_p}) e^{j\Omega_p}]}{[(1 - r_p) e^{j\Omega_p}][(1 - r_p e^{-j2\Omega_p}) e^{j\Omega_p}]} \\ &= b_1 \frac{(1 - z_1 e^{-j\Omega_p})}{(1 - r_p)(1 - r_p e^{-j2\Omega_p}) (e^{j\Omega_p})} \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} |H(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\Omega_p} &= |b_1| \frac{|(1 - z_1 e^{-j\Omega_p})|}{|(1 - r_p)| |(1 - r_p e^{-j2\Omega_p})|} \\ &= |b_1| \frac{|1 - z_1 [\cos(\Omega_p) - j \sin(\Omega_p)]|}{(1 - r_p) |1 - r_p [\cos(2\Omega_p) - j \sin(2\Omega_p)]|} \\ &= |b_1| \frac{|[1 - z_1 \cos(\Omega_p)] + j [z_1 \sin(\Omega_p)]|}{(1 - r_p) |[1 - r_p \cos(2\Omega_p)] + j [r_p \sin(2\Omega_p)]|} \\ &= |b_1| \frac{\sqrt{1 - 2z_1 \cos(\Omega_p) + z_1^2 \cos^2(\Omega_p) + z_1^2 \sin^2(\Omega_p)}}{(1 - r_p) \sqrt{1 - 2r_p \cos(2\Omega_p) + r_p^2 \cos^2(2\Omega_p) + r_p^2 \sin^2(2\Omega_p)}} \\ &= |b_1| \frac{\sqrt{1 - [2 \cos(\Omega_p)] z_1 + z_1^2}}{(1 - r_p) \sqrt{1 - [2 \cos(2\Omega_p)] r_p + r_p^2}}, \end{aligned}$$

de tal forma que, para $|H(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\Omega_p} = 1$, deve-se ter $|b_1| = (1 - r_p) \left(\frac{\sqrt{1 - [2 \cos(2\Omega_p)] r_p + r_p^2}}{\sqrt{1 - [2 \cos(\Omega_p)] z_1 + z_1^2}} \right)$ e $b_2 = -b_1 z_1$.

6.3.6 Caso 6: $b_0 \neq 0$, $b_1 = 0$ e $b_2 \neq 0$.

O sistema desse caso pode ser interpretado como a associação do sistema do “Caso 1” em paralelo com o sistema do “Caso 3”.

A Função de Transferência é dada por

$$H(z) = \frac{b_0 + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = b_0 \frac{z^2 + \left(\frac{b_2}{b_0}\right)}{z^2 + a_1 z + a_2} = b_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)},$$

onde $r_z = \sqrt{-(b_2/b_0)}$, $z_1 = r_z$, $z_2 = -r_z$, $(p_1 + p_2) = -a_1$ e $(p_1 p_2) = a_2$.

Fazendo-se $z = e^{j\Omega}$, a Resposta em Frequência é calculada por

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 \frac{(e^{j\Omega} - z_1)(e^{j\Omega} - z_2)}{(e^{j\Omega} - p_1)(e^{j\Omega} - p_2)}.$$

Relações entre o tipo numérico dos zeros e os sinais de b_k :

- Se $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, então b_2 e b_0 possuem sinais diferentes.
- Se $z_1 = z_2 = 0$, então $b_2 = 0$ e o SLIT recai no “Caso 1”.
- Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, então b_2 e b_0 possuem sinais iguais.

Relações entre a posição dos zeros e os valores relativos de b_k :

- Se $|r_z| > 1$, então $|b_2| > |b_0|$.
- Se $|r_z| = \pm 1$, então $|b_2| = |b_0|$.
- Se $|r_z| < 1$, então $|b_2| < |b_0|$.

Relações quanto ao tipo numérico das singularidades (zeros e pólos):

- Se $z_1, z_2, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, então o SLIT de segunda ordem pode ser interpretado como uma associação cascata dos casos de primeira ordem.
- Se $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, mas $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$, então $p_1 = r_p e^{j\Omega_p}$, $p_2 = p_1^* = r_p e^{-j\Omega_p}$ e

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 \frac{(e^{j\Omega} - r_z)(e^{j\Omega} + r_z)}{(e^{j\Omega} - r_p e^{j\Omega_p})(e^{j\Omega} - r_p e^{-j\Omega_p})}.$$

- Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, mas $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, então $z_1 = r_z e^{j\Omega_z}$, $z_2 = z_1^* = r_z e^{-j\Omega_z}$ e

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 \frac{(e^{j\Omega} - r_z e^{j\frac{\pi}{2}})(e^{j\Omega} - r_z e^{-j\frac{\pi}{2}})}{(e^{j\Omega} - p_1)(e^{j\Omega} - p_2)}.$$

- Se $z_1, z_2, p_1, p_2 \in \mathbb{C}$, então $z_1 = r_z e^{j\Omega_z}$, $z_2 = z_1^* = r_z e^{-j\Omega_z}$, $p_1 = r_p e^{j\Omega_p}$, $p_2 = p_1^* = r_p e^{-j\Omega_p}$ e

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 \frac{(e^{j\Omega} - r_z e^{j\frac{\pi}{2}})(e^{j\Omega} - r_z e^{-j\frac{\pi}{2}})}{(e^{j\Omega} - r_p e^{j\Omega_p})(e^{j\Omega} - r_p e^{-j\Omega_p})}.$$

6.3.7 Caso 7: $b_0 \neq 0$, $b_1 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$.

O sistema desse caso pode ser interpretado como a associação paralela dos sistemas do “Caso 1”, do “Caso 2” e do “Caso 3”.

A Função de Transferência é dada por

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = b_0 \frac{z^2 + \left(\frac{b_1}{b_0}\right) z + \left(\frac{b_2}{b_0}\right)}{z^2 + a_1 z + a_2} = b_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)},$$

onde $(z_1 + z_2) = -(b_1/b_0)$, $(z_1 z_2) = (b_2/b_0)$, $(p_1 + p_2) = -a_1$ e $(p_1 p_2) = a_2$.

Fazendo-se $z = e^{j\Omega}$, a Resposta em Frequência é calculada por

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 \frac{(e^{j\Omega} - z_1)(e^{j\Omega} - z_2)}{(e^{j\Omega} - p_1)(e^{j\Omega} - p_2)}.$$

Relações quanto ao tipo numérico das singularidades (zeros e pólos):

- Se $z_1, z_2, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, então o SLIT de segunda ordem pode ser interpretado como uma associação cascata dos casos de primeira ordem.
- Se $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, mas $p_1, p_2 \in \mathbb{C}$, então $p_1 = r_p e^{j\Omega_p}$, $p_2 = p_1^* = r_p e^{-j\Omega_p}$ e

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 \frac{(e^{j\Omega} - z_1)(e^{j\Omega} - z_2)}{(e^{j\Omega} - r_p e^{j\Omega_p})(e^{j\Omega} - r_p e^{-j\Omega_p})}.$$

- Se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, mas $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, então $z_1 = r_z e^{j\Omega_z}$, $z_2 = z_1^* = r_z e^{-j\Omega_z}$ e

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 \frac{(e^{j\Omega} - r_z e^{j\Omega_z})(e^{j\Omega} - r_z e^{-j\Omega_z})}{(e^{j\Omega} - p_1)(e^{j\Omega} - p_2)}.$$

- Se $z_1, z_2, p_1, p_2 \in \mathbb{C}$, então $z_1 = r_z e^{j\Omega_z}$, $z_2 = z_1^* = r_z e^{-j\Omega_z}$, $p_1 = r_p e^{j\Omega_p}$, $p_2 = p_1^* = r_p e^{-j\Omega_p}$ e

$$H(e^{j\Omega}) = b_0 \frac{(e^{j\Omega} - r_z e^{j\Omega_z})(e^{j\Omega} - r_z e^{-j\Omega_z})}{(e^{j\Omega} - r_p e^{j\Omega_p})(e^{j\Omega} - r_p e^{-j\Omega_p})}.$$

Parte II

Prática

Capítulo 7

Listagens de códigos

7.1 Introdução

A seguir, são apresentadas listagens de códigos para o aplicativo matemático Octave.

Os códigos visam fornecer um esclarecimento visual sobre alguns dos tópicos abordados na parte teórica do documento.

7.2 Adição e subtração de vetores

- A Listagem 1 apresenta uma visualização geométrica da adição e da subtração de números complexos. São apresentados exemplos com zeros e com pólos.

Listagem 1 - Visualização geométrica da adição e da subtração de números complexos:

```
%
% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%%
%
%   Influencia das posicoes de zeros e polos
%   no calculo da Resposta em Frequencia:
%
%       - Visualizacao geométrica
%         da adicao e da subtracao de numeros complexos.
%
%
%   Versao: 2019_03_03.
%
%   Autor : Alexandre Santos de la Vega.
%
% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%%
%
% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%%
%
% limpa o ambiente de trabalho
%
```

```

clear all
close all

%
%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%
%

%
% calcula o circulo de raio unitario
%

% define numero de pontos
N = 360;

% define o passo dos angulos
w_step = 2*pi/N;

% define o vetor de angulos
w_circ = 0:w_step:(2*pi);

% calcula o vetor de pontos
unit_circ_line = exp(j*w_circ);

% calcula as partes real e imag
xucl = real(unit_circ_line);
yucl = imag(unit_circ_line);

%
%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%
%

%
% define pontos para subtracao
% e soma
%

% define um critical point
w_cp = pi/4;
cp = exp(j*w_cp);

% define um zero
z = complex((-0.5),(0));

% define um polo
p = complex(( 0.5),(0));

%
%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%
%
```

```

% calcula as diferencas e as somas
% entre o critical point e
% as singularidades (zeros e polos)

% diferencas
cp_sub_z = cp - z;
cp_sub_p = cp - p;

%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%

% somas

%
cp_add_z = cp + z;
cp_add_p = cp + p;

%
%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%
%

%
% calcula as partes real e imag
% de cada vetor
%

% origem
xorg = 0;
yorg = 0;

% critical point
xcp = real(cp);
ycp = imag(cp);

% zero
xz = real(z);
yz = imag(z);

% polo
xp = real(p);
yp = imag(p);

%
%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%
%

%
% elabora os graficos
%
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% define parametros para os graficos

% define valor inicial da figuras
FigNbr = 0;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
FigNbr = FigNbr + 1;
figure(FigNbr)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
subplot(2,2,1)
%
hold on
%
plot(xucl,yucl,'k')
%
hq = quiver([xorg, xorg],[yorg, yorg],
            [xz, xcp], [yz, ycp],1,'b');
set (hq, "maxheadsize", .0);
%
hq = quiver(xorg,yorg,real(cp_add_z),imag(cp_add_z),1,'k');
set (hq, "maxheadsize", .05);
%
hz = plot(xcp,ycp,'dk');
set (hz, "markersize", 12);
%
hz = plot(xz,yz,'or');
set (hz, "markersize", 12);
%
title(cellstr(['Soma de vetores';
              '( e^{j \Omega_i} + z_j )']))
ylabel('Im \{ \cdot \}')
xlabel('Re \{ \cdot \}')
%
axis('image')
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
subplot(2,2,2)
%
hold on
%
plot(xucl,yucl,'k')
%

```

```

hq = quiver([xorg, xorg],[yorg, yorg],
            [xp, xcp], [yp, ycp],1,'b');
set (hq, "maxheadsize", .0);
%
hq = quiver(xorg,yorg,real(cp_add_p),imag(cp_add_p),1,'k');
set (hq, "maxheadsize", .05);
%
hz = plot(xcp,ycp,'dk');
set (hz, "markersize", 12);
%
hz = plot(xp,yp,'xr');
set (hz, "markersize", 12);
%
title(cellstr(['Soma de vetores';
              '( e^{j \Omega_i} + p_j )']))
ylabel('Im \{ \cdot \}')
xlabel('Re \{ \cdot \}')
%
axis('image')
%
%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%
%
subplot(2,2,3)
%
hold on
%
plot(xucl,yucl,'k')
%
hq = quiver([xorg, xorg],[yorg, yorg],
            [xz, xcp], [yz, ycp],1,'b');
set (hq, "maxheadsize", .0);
%
hq = quiver(xz,yz,real(cp_sub_z),imag(cp_sub_z),1,'k');
set (hq, "maxheadsize", .05);
%
hz = plot(xcp,ycp,'dk');
set (hz, "markersize", 12);
%
hz = plot(xz,yz,'or');
set (hz, "markersize", 12);
%
title(cellstr(['Subtração de vetores';
              '( e^{j \Omega_i} - z_j )']))
ylabel('Im \{ \cdot \}')
xlabel('Re \{ \cdot \}')
%
axis('image')
%
%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%

```

```

%
subplot(2,2,4)
%
hold on
%
plot(xucl,yucl,'k')
%
hq = quiver([xorg, xorg],[yorg, yorg],
            [xp, xcp], [yp, ycp],1,'b');
set (hq, "maxheadsize", .0);
%
hq = quiver(xp,yp,real(cp_sub_p),imag(cp_sub_p),1,'k');
set (hq, "maxheadsize", .05);
%
hz = plot(xcp,ycp,'dk');
set (hz, "markersize", 12);
%
hz = plot(xp,yp,'xr');
set (hz, "markersize", 12);
%
title(cellstr(['Subtração de vetores';
               '( e^{j \Omega_i} - p_j )']))
ylabel('Im \{ \cdot \}')
xlabel('Re \{ \cdot \}')
%
axis('image')
%
%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%
%

%
% EOF
%
```

7.3 Ganho e relações entre ganhos, para zeros e pólos

- A Listagem 2 apresenta curvas de ganho e de relações entre ganhos, em função da posição de zeros e de pólos.

Listagem 2 - Ganho e relações entre ganhos, para zeros e pólos:

```

%
% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%%
%
%   Influencia das posicoes de zeros e polos
%   no calculo da Resposta em Frequencia:
%
%   - Ganhos.
%   - Relacoes entre ganhos.
%   - Calculos nas frequencias de ganhos minimo e maximo.
%
%
%   Versao: 2019_03_05.
%
%   Autor : Alexandre Santos de la Vega.
%
% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%%
%
% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%%
%
% limpa o ambiente de trabalho
%
clear all
close all

%
% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%% %%%%%%%%%%
%
%
% rstep = 0.001;

%
% rz = 0:rstep:3;
%
% gzk  = abs(1 - rz);
% gzkpi = abs(1 + rz);

%
% e = 0.01;
% rp = 0:rstep:(1-e);

```

```

%
gpk  = 1 ./ abs(1 - rp);
gpkpi = 1 ./ abs(1 + rp);

%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%

%
FigNbr = 0;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%
FigNbr = FigNbr + 1;
%
figure(FigNbr)
%
%
subplot(3,2,1)
plot(rz, gzk)
%
v = axis;
v(3) = 0;
v(4) = max(rz) + 1;
axis(v)
%
title(cellstr(['Influência de um zero';
               'Ganho em \Omega_k']))

%
ylabel('Gzk')
%
%
subplot(3,2,2)
plot(rz, gzkpi)
%
v = axis;
v(3) = 0;
v(4) = max(rz) + 1;
axis(v)
%
title(cellstr(['Influência de um zero';
               'Ganho em \Omega_{k\pi}']))

%
ylabel('Gzk\pi')
%
%
subplot(3,2,3)
plot(rz, (gzkpi - gzk))

```

```

%
v = axis;
v(3) = 0;
v(4) = max(rz) + 1;
axis(v)
%
title('Diferença entre os ganhos em \Omega_k e \Omega_{k\pi}')
%
ylabel('Gzk - Gzk\pi')
%
%
subplot(3,2,5)
plot(rz, (gzk ./ gzkpi))
%
v = axis;
v(3) = 0;
%v(4) = max(rz) + 1;
v(4) = 1.001;
axis(v)
%
title('Relação entre os ganhos em \Omega_k e \Omega_{k\pi}')
%
ylabel('Gzk / Gzk\pi')
%
xlabel('r')
%
%
subplot(3,2,6)
plot(rz, (gzkpi ./ gzk))
%
v = axis;
v(3) = 0;
%v(4) = max(rz) + 1;
%%v(4) = 1.001;
v(4) = 10;
axis(v)
%
title('Relação entre os ganhos em \Omega_k e \Omega_{k\pi}')
%
ylabel('Gzk\pi / Gzk')
%
xlabel('r')

%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%

%
FigNbr = FigNbr + 1;
%
figure(FigNbr)

```

```

%
%
subplot(3,2,1)
plot(rp, gpk)
%
v = axis;
v(3) = 0;
v(4) = 100;
axis(v)
%
title(cellstr(['Influência de um pólo';
               'Ganho em \Omega_k']))
%
ylabel('Gpk')
%
%
subplot(3,2,2)
plot(rp, gpkpi)
%
v = axis;
v(3) = 0;
v(4) = 1.001;
axis(v)
%
title(cellstr(['Influência de um pólo';
               'Ganho em \Omega_{k\pi}']))
%
ylabel('Gpk\pi')
%
%
subplot(3,2,3)
plot(rp, (gpk - gpkpi))
%
v = axis;
v(3) = 0;
v(4) = 100;
axis(v)
%
title('Diferença entre os ganhos em \Omega_k e \Omega_{k\pi}')
%
ylabel('Gpk - Gpk\pi')
%
%
subplot(3,2,5)
plot(rp, (gpk ./ gpkpi))
%
v = axis;
v(3) = 0;
v(4) = 100;

```

```
axis(v)
%
title('Relação entre os ganhos em \Omega_k e \Omega_{k\pi}')
%
ylabel('Gpk / Gpk\pi')
%
xlabel('r')
%
%
subplot(3,2,6)
plot(rp, (gpkpi ./ gpk))
%
v = axis;
v(3) = 0;
v(4) = 1.001;
axis(v)
%
title('Relação entre os ganhos em \Omega_k e \Omega_{k\pi}')
%
ylabel('Gpk\pi / Gpk')
%
xlabel('r')

%
%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%% %%%%%%%%%%%%%
%

%
% EOF
%
```

Referências bibliográficas

- [Ant86] A. Antoniou. *Digital Filters: Analysis and Design*. Tata McGraw-Hill, New Delhi, India, 2nd reprint edition, 1986.
- [Cad73] J. A. Cadzow. *Discrete-Time Systems: An Introduction with Interdisciplinary Applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [DdSN10] P. S. R. Diniz, E. A. B. da Silva, and S. Lima Netto. *Digital Signal Processing: System Analysis and Design*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition, 2010.
- [Jac96] L. B. Jackson. *Digital Filters and Signal Processing - with MATLAB exercises*. Kluwer Academic Publishers, 3rd edition, 1996.
- [KD04] H. Kopka and P. W. Daly. *A Guide to L^AT_EX and Electronic Publishing*. Addison-Wesley, Harlow, England, 4th edition, 2004.
- [MG04] F. Mittelbach and M. Goossens. *The L^AT_EX Companion*. Addison-Wesley, Boston, MA, USA, 2th edition, 2004.
- [Mit98] S. K. Mitra. *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach*. McGraw-Hill, New York, NY, 1998.
- [OS75] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. *Digital Signal Processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- [OWY83] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and I. T. Young. *Signals and Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- [PL76] A. Peled and B. Liu. *Digital Signal Processing: Theory, Design and Implementation*. John Wiley, New York, NY, 1976.
- [PM06] J. G. Proakis and D. G. Manolakis. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*. Prentice Hall, 4th edition, 2006.
- [Rob09] M. J. Roberts. *Fundamentos em Sinais e Sistemas*. McGraw-Hill, São Paulo, SP, 2009.
- [SDD84] W. D. Stanley, G. R. Dougherty, and R. Dougherty. *Signals and Systems*. Prentice-Hall, Reston, Virginia, 2nd edition, 1984.
- [She95] K. Shenoi. *Digital Signal Processing in Telecommunications*. Prentice-Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 1995.
- [SK89] R. D. Strum and D. E. Kirk. *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*. Addison-Wesley, Massachusetts, 1989.

